Introducción

**“Saber es poder
comprender es tolerar”**

La idea que me motiva a escribir estas notas esta sustentada en la firme creencia que, “una condición necesaria y suficiente para que en algún instante se produzca aprendizaje de algo es que, la intersección entre los deseos de enseñar del que enseña, y los deseos de aprender del que aprende, sea no vacía.”

Lo anterior es con seguridad una muy difícil tarea, no obstante poseo la esperanza que estas notas ayudarán en parte, a generar la motivación en los actores para que ingresen a esa ”intersección.” Por esto espero que con estos apuntes se consiga al menos alguno de los siguientes objetivos.

Dar información introductoria y básica a los estudiantes de un primer curso de Álgebra.

Servir de hilo conductor para que los estudiantes recorran las primeras ideas algebraicas hasta llegar a las bases del algebra Lineal, y puedan posteriormente reflexionar, respecto de las ilimitadas aplicaciones que esta disciplina posee.

Generar un ambiente de diálogo permanente, entre el Profesor y el Estudiante del cual se concluya al menos que, “lo abstracto deja de serlo cuando se hace tangible en la mente, y se plasma a través de la mano.”

Motivar al estudiante a profundizar día a día, cada uno de los tópicos discutidos en clases, usando la bibliografía de apoyo sugerida por su profesor, para que se concreten y conecten la teoría y la práctica.

Motivar al profesor, para que complemente estas notas, dándoles la contundencia y versatilidad necesaria para mantener vivo en el estudiante su interés por la asignatura.

Estas notas están distribuidas en dos tomos, en el primero de ellos se hace énfasis en estructuras algebraicas y en el segundo abordamos definitivamente temas de álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones más frecuentes.

Deseo enfatizar que desde hoy estas notas estarán en constante revisión con el único objetivo de mejorar y así llegar a ser alguna vez, un razonable material de apoyo, para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Este primer trabajo se realizó en el marco del proyecto de docencia **“Construcción de un libro de Álgebra para el primer año de Ingeniería Civil ”** con el apoyo y financiamiento de la Vicerrectoría de Docencia y Extensión.

Finalmente debo agradecer el inestimable trabajo de la Profesora Gabriela Peñailillo, quien con esmero y dedicación corrigió y además propuso ideas en la construcción de estas notas.

Ricardo Santander Baeza

CAPITULO 1

Matemática Básica

1. Contenidos

(1) Polinomios

(2) Adición de Polinomios

(3) Producto de Polinomios

(4) División de Polinomios

2. Introducción

2.1. Comentarios y Definiciones.

La idea aquí es introducir informalmente el concepto de polinomio, el cual será abordado posteriormente desde el punto de vista de las estructuras algebraicas[1].

El punto de partida será un elemento que " según parece todos conocemos en mayor o menor medida ", **EL NÚMERO** interpretado de una manera altamente intuitiva:

¿ Qué es un número ?. Probablemente buscando una buena respuesta podríamos pasar por todas las épocas citando personajes fabulosos como: Pitágoras, Hermes, Hiram, entre otros, sin encontrar una respuesta satisfactoria, sin embargo todos tenemos nos guste o no, una idea que nos deja tranquilo respecto de lo que un número es, probablemente la más común de las interpretaciones, sea asociar un número con la idea de cantidades de cosas, por ejemplo un maestro, tres malos albañiles, nueve escogidos caballeros, etc. Así que para una primera aproximación nos contentaremos con lo que él representa.

En esa dirección observemos los ejemplos:

(1) Caso del 33

$$\begin{aligned} 33 &= 3 \cdot 10 + 3 \\ &= 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

(2) Caso del 987

$$\begin{aligned} 987 &= 9 \cdot 100 + 87 \\ &= 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

[1] Ver capitulo estructuras algebraicas

(3) ¿ Cuál es la idea ? ó ¿ Cómo se hace ?

La idea es que en la representación en potencias del número 10 (cosas del tipo 10^n), aceptamos como coeficientes (los números que multiplican a las potencias de 10) números mayores o iguales a 0 y menores que 10, y lo hacemos así:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 33 & : & 10 & = & 3 \\ - & 30 & & & & \\ & -- & & & & \\ & 3 & & & & \end{array} \Longleftrightarrow 33 = 3\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$$

Para el número 987 tenemos que

$$\begin{array}{rrcrcr} & 987 & : & 100 & = & 9 \\ - & 900 & & & & \\ & -- & & & & \\ & 87 & & & & \end{array} \Longleftrightarrow 987 = 9\cdot 10^2 + 87 \tag{1}$$

Ahora, aplicamos el proceso al número 87 y obtenemos:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 87 & : & 10 & = & 8 \\ - & 80 & & & & \\ & -- & & & & \\ & 7 & & & & \end{array} \Longleftrightarrow 87 = 8\cdot 10^1 + 7 \tag{2}$$

Finalmente sustituyendo, obtenemos que:

$$987 = 9\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 \tag{3}$$

Definición 2.1.1.

Dado un número natural n, ($n \in \mathbb{N}$). Si

$$n = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0; \quad (0 \leq a_j \leq 9); (0 \leq j \leq s)$$

entonces

$$n = a_s a_{s-1} a_{s-2} a_{s-3} \cdots a_2 a_1 a_0 \tag{4}$$

La llamaremos representación del número n en base 10

Observación 2.1.2.

La idea de representar un número de la forma (4) no es una exclusividad del número 10, más aún si uno se fija en la idea central obtiene un algoritmo o procedimiento para representar números en cualquier base entera.

En efecto

(1) Por ejemplo $n = 10$ lo podemos representar en base "2", como sigue

$$\begin{aligned} 10 &= 8+2 \\ &= 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 \\ &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \end{aligned}$$

Así que,

$$10 = 1010 \qquad (\text{ base } 2) \tag{5}$$

(2) Para $n = 33$ tenemos que

$$\begin{aligned} 33 &= 2\cdot 16+1 \\ &= 2\cdot 2^4 + 1 \\ &= 2^5 + 1 \\ &= 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \end{aligned}$$

Luego,

$$33 = 100001 \qquad (\text{base } 2)$$

(3) Para $n = 10$ en base 3 tenemos

$$\begin{aligned} 10 &= 9+1 \\ &= 3^2 + 1 \\ &= 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^0 \\ &= 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 \end{aligned}$$

Así que,

$$10 = 101 \qquad (\text{ base } 3) \tag{6}$$

(4) Para $n = 33$ tenemos que

$$\begin{aligned} 33 &= 27+6 \\ &= 3^3 + 2\cdot 3 \\ &= 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 \end{aligned}$$

Luego,

$$33 = 1020 \qquad \text{(base 3)}$$

Observación 2.1.3.

Es posible representar un número n, $(n \in \mathbb{N})$ en base m, $(m \in \mathbb{N})$, es decir,

$$n = a_q a_{q-1} \cdots a_1 a_0 \quad \text{(base m)} \Longleftrightarrow n = a_q m^q + \cdots + a_1 m^1 + a_0 m^0 \quad (0 \leq a_i \leq m) \tag{7}$$

pues:

(1) Las potencias de m están definidas, es decir, $m^0 = 1$ y $m^r \cdot m^t = m^{r+t}$

(2) Los coeficientes a_i de la representación en base m verifican la propiedad $0 \leq a_i \leq m$, esta propiedad permite ver a m no como el número que es, sino como un "símbolo "

(3) Por tanto, para obtener una estructura similar debemos llevar en consideración estas propiedades...

Definición 2.1.4. *Definición informal de polinomio.*

Una expresión se llama un polinomio en la variable "x", y con coeficientes en los números reales si:

(1) Es de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \tag{8}$$

(2) Los números a_s, donde $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, se llaman los coeficientes del polinomio y son en este caso numeros reales.

(3) La variable x satisface las propiedades:

  (a) x no es un número complejo

  (b) $x^0 = 1$

  (c) $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$

(4) Los exponentes son números enteros no negativos, es decir $n \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$

Ejemplo 2.1.5.

(1) $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n$; se llama el polinomio nulo y lo escribiremos de la forma abreviada: $p(x) = 0$

(2) $p(x) = 1 - 3 \cdot x^2 + x^5$

(3) $q(x) = \sqrt{3}\, x + \dfrac{5}{7} x^3$

(4) De acuerdo a estudios hechos por la policía la cantidad de robos por cada 100.000 habitantes, a partir de 1990 puede calcularse aproximadamente por el polinomio:

$$r(x) = 251 - 17.24 \cdot x + 1.76 \cdot x^2 \tag{9}$$

(a) ¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes habrá aproximadamente en 1990? Para este caso, tenemos el siguiente análisis del problema:

1990 es el primer año así que en $r(x)$ debemos hacer $x = 0$, esto es:

$$\begin{aligned} r(0) &= 251 - 17.24 \cdot 0 + 1.76 \cdot 0^2 \\ &= 251 \end{aligned} \tag{10}$$

(b) ¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes habrá aproximadamente en 2000? Para este caso, debemos hacer en $r(x)$, $x = 10$, esto es:

$$\begin{aligned} r(10) &= 251 - 17.24 \cdot 10 + 1.76 \cdot 10^2 \\ &= 251 - 172.4 + 176 \\ &\approx 255 \end{aligned} \tag{11}$$

(c) ¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes habrá aproximadamente en 2010? Para este caso, debemos hacer en $r(x)$, $x = 20$, esto es:

$$\begin{aligned} r(20) &= 251 - 17.24 \cdot 20 + 1.76 \cdot 20^2 \\ &\approx 610 \end{aligned} \tag{12}$$

(d) ¿Será posible que en algún instante los robos se aproximen a cero por cada 100000 habitantes?
Para este caso, debemos hacer en $r(x) = 0$,esto es:

$$\begin{aligned} 251 - 17.24 \cdot x + 1.76 \cdot x^2 &= 0 \\ &\Downarrow \\ x &= \frac{17.24 \pm \sqrt{(17.24)^2 - 4 \cdot 1.76 \cdot 251}}{2 \cdot 1.76} \\ &= \frac{17.24 \pm \sqrt{297.2176 - 1767.04}}{3.52} \\ &= \frac{17.24 \pm \sqrt{-1463.8224}}{3.52} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

La conclusión es que esta fórmula indica que es necesario tomar otras medidas adicionales, caso contrario la delincuencia triunfará.!!!

Definición 2.1.6. *Grado de un polinomio*

Llamaremos grado de un polinomio al mayor exponente de la variable x, cuyo coeficiente es distinto de cero.

Notación: $\partial(p(x))$ = grado del polinomio $p(x)$

Ejemplo 2.1.7.

(1) $\partial(1+3x^3-2x^7)=7$

(2) $\partial(a_0)=0 \quad a_0\in(\mathbb{R}-\{0\})$

(3) $\partial(2+3x-5x^2+x^4)=4$

Para concluir esta sección haremos una formal pero muy útil definición

Definición 2.1.8.

Igualdad de polinomios

Si $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ y $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ entonces

$$p(x)=q(x)\Longleftrightarrow n=m \quad \wedge \quad a_i=b_i \quad (i=0,1,2,\dots,n) \tag{13}$$

3. Adición de Polinomios

3.1. Motivación.

(1) Sabemos que la adición o suma de números se realiza en la forma usual; por ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 3\\ + & 4\\ \hline & 7\end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 31\\ + & 02\\ \hline & 33\end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3285\\ + & 0015\\ \hline & 3300\end{array} \tag{14}$$

Esta forma de disponer los números para sumarlos no es al azar, en realidad corresponde a un ordenamiento lógico, por ejemplo en base 10:

$$\begin{array}{rc} & 3\cdot 10^0\\ + & 4\cdot 10^0\\ \hline & 7\cdot 10^0\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & 3\cdot 10^1+1\cdot 10^0\\ + & 0\cdot 10^1+2\cdot 10^0\\ \hline & 3\cdot 10^1+3\cdot 10^0\end{array} \qquad \begin{array}{rc} & 3\cdot 10^3+2\cdot 10^2+8\cdot 10^1+5\cdot 10^0\\ + & 0\cdot 10^3+0\cdot 10^2+1\cdot 10^1+5\cdot 10^0\\ \hline & 3\cdot 10^3+3\cdot 10^2+0\cdot 10^1+0\cdot 10^0\end{array} \tag{15}$$

(2) Otras posibles escrituras, que emulen la escritura en base 10.

Base 2: En este caso tenemos por ejemplo:

- $2=1\cdot 2^1+0\cdot 2^0\Longrightarrow 2=10 \quad (base 2)$
- $10=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=1010 \quad (base 2)$
- $12=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=1100 \quad (base 2)$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rrcccccccccl} & 2 & = & 0\cdot 2^3 & + & 0\cdot 2^2 & + & 1\cdot 2^1 & + & 0\cdot 2^0 & (base 2)\\ + & 10 & = & 1\cdot 2^3 & + & 0\cdot 2^2 & + & 1\cdot 2^1 & + & 0\cdot 2^0 & (base 2)\\ \hline & 12 & = & 1\cdot 2^3 & + & 1\cdot 2^2 & + & 0\cdot 2^1 & + & 0\cdot 2^0 & (base 2)\end{array}$$

(3) Para concluir esta motivación observen que nuestros polinomios se escriben " en base x ", aunque ya dijimos que x no es un número, sin embargo podemos imitar el procedimiento para sumar representaciones numéricas con las debidas precauciones; por ejemplo:

Ejemplo 3.1.1.

Si $p(x) = 5 + x + 2x^2 + 3 \cdot x^3 + x^5$ y $q(x) = 4x + 3x^2 - 7x^4$ entonces aplicando el formato utilizado para la representación de los números en las diversas bases tenemos que:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
p(x) & = & 5x^0 & + & 2x^1 & + & 0x^2 & + & 3x^3 & + & 0x^4 & + & 1 \cdot x^5 \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
q(x) & = & 0x^0 & + & 4x^1 & + & 3x^2 & + & 0x^3 & + & (-7)x^4 & + & 0x^5 \\
\hline
p(x)+q(x) & = & (5+0)x^0 & + & (2+4)x^1 & + & (0+3)x^2 & + & (3+0)x^3 & + & (0+(-7))x^4 & + & (1+0)x^5
\end{array}
$$

Luego,

$$p(x) + q(x) = 5 + 6x^1 + 3x^2 + 3x^3 - 7x^4 + x^5 \tag{16}$$

Definición 3.1.2.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_mx^m$ tal que $\partial(p(x)) = n$, $\partial(q(x)) = m$ y $n \leq m$ entonces

$$\boxed{p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \cdots + (a_m + b_m)x^m}$$

representará la adición de polinomios o la forma de sumar dos polinomios.

Ejemplo 3.1.3. *Suma de polinomios*

(1) *Sumemos los polinomios:* $p(x) = x^2 + 5x - 2$ *y* $q(x) = 3x^2 + 7x + 4$

Solución

$$p(x) + q(x) = 4x^2 + 12x + 2$$

(2) *Sumemos los polinomios:* $p(x) = 4x^3 + 2x + 21$ *y* $q(x) = x^2 + x$

Solución

$$p(x) + q(x) = 4x^3 + x^2 + 3x + 21$$

Observación 3.1.4.

Si recordamos que la resta de dos reales puede ser interpretada como la operación inversa de la adición, esto es:

$$a - b = a + (-b) \tag{17}$$

Así por ejemplo,

$$\begin{aligned} 45 - 12 &= (4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) - (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) \\ &= 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + (-1) \cdot 10^1 + (-2) \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 - 1 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^0 \\ &= 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ &= 33 \end{aligned}$$

Lo anterior permite definir, la resta de polinomios como sigue:

Definición 3.1.5.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_mx^m$ tal que $\partial(p(x)) = n$, $\partial(q(x)) = m$ y $n \leq m$ entonces

$$\boxed{p(x) - q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + (a_3 - b_3)x^3 + \cdots + (a_m - b_m)x^m}$$

representará la sustracción de polinomios o la forma de restar dos polinomios.

Ejemplo 3.1.6. *Resta de polinomios*

(1) *Restemos los polinomios:* $p(x) = x^2 + 5x - 2$ *y* $q(x) = 3x^2 + 7x + 4$

Solución

$$p(x) - q(x) = -2x^2 - 2x - 6$$

(2) *Restemos los polinomios:* $p(x) = 4x^3 + 2x + 21$ *y* $q(x) = x^2 + x$

Solución

$$p(x) - q(x) = 4x^3 - x^2 + x + 21$$

Definición 3.1.7.

Notaremos al conjunto de polinomios como:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathbb{R}[x] & = & \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ (2) & \mathbb{R}_s[x] & = & \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \partial(p(x)) \leq s\} \cup \{0\} \end{array}$$

3.2. Propiedades de la Adición de Polinomios.

(1) Propiedad Asociativa

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ y $r(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x) \tag{18}$$

En efecto

$$\begin{aligned} p(x) + [q(x) + r(x)] &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + [(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) + \\ &\quad (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)] \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \cdots + (b_n + c_n)x^n] \\ &= (a_0 + [b_0 + c_0]) + (a_1 + [b_1 + c_1])x + \cdots + (a_n + [b_n + c_n])x^n) \\ &= ([a_0 + b_0] + c_0) + ([a_1 + b_1] + c_1)x + \cdots + ([a_n + b_n] + c_n)x^n) \\ &= ([a_0 + b_0] + [a_1 + b_1]x + \cdots + [a_n + b_n]x^n) + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\ &= [(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)] + \\ &\quad (c_0 + c_1x + \cdots + c - nx^n) \\ &= [p(x) + q(x)] + r(x) \end{aligned}$$

(2) Existencia del polinomio neutro aditivo

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x) + 0 = p(x) \tag{19}$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
p(x)+0 &= (a_0+a_1x+\cdots a_nx^n)+(0+0x+\cdots+0x^n)\\
&= (a_0+0)+(a_1+0)x+\cdots(a_n+0)x^n\\
&= a_0+a_1x+\cdots a_nx^n\\
&= p(x)
\end{aligned}
$$

(3) Existencia del polinomio inverso aditivo

Si $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathbb{R}[x]$ entonces

(20) $$p(x)+(-p(x))=0$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
p(x)+(-p(x)) &= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(-[a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n])\\
&= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n])\\
&= 0+0x+\cdots+0x^n\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(4) Propiedad Conmutativa

Sean $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ y $q(x)\in\mathbb{R}[x]$ tal que:

$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ y $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ entonces

(21) $$p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)\\
&= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\\
&= (b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+\cdots+(b_n+a_n)x^n\\
&= (b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)+(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\
&= q(x)+p(x)
\end{aligned}
$$

(5) Propiedad del grado de la adición de polinomios

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$\partial(p(x) + q(x)) \leq \text{máximo}\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\} \tag{22}$$

4. Producto de Polinomios

4.1. Motivación.

(1) Sabemos que la multiplicación de números nos dice que $3 \cdot 11 = 33$, pero también tenemos que:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 11 &= (3 \cdot 10^0) \cdot (1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) \\ &= (3 \cdot 10^0) \cdot ((1 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^0) \cdot (1 \cdot 10^0) \\ &= (3 \cdot 1) \cdot 10^{0+1} + (3 \cdot 1) \cdot 10^{0+0} \\ &= 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

(2) Como $231 \cdot 27 = 6237$ entonces en base 10

$$\begin{aligned} 231 \cdot 27 &= (2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0) \cdot (2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0) \\ &= (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) \cdot (2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0) \\ &= (2 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0) + (3 \cdot 10^1) \cdot (2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0) + (1 \cdot 10^0) \cdot (2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0) \\ &= (2 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2)(7 \cdot 10^0) + (3 \cdot 10^1) \cdot (2 \cdot 10) + (3 \cdot 10^1)(7 \cdot 10^0) + \\ &\quad (1 \cdot 10^0) \cdot (2 \cdot 10) + (1 \cdot 10^0)(7 \cdot 10^0) \\ &= 4 \cdot 10^3 + 14 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 10^3 + (10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2 + (2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 10^3 + 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 5 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 5 \cdot 10^3 + (10^1 + 2 \cdot 10^0) \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 5 \cdot 10^3 + 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 6237 \end{aligned} \tag{23}$$

La forma y sólo la forma de multiplicar los números en base 10, sugiere definir el producto de polinomios como sigue:

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ son dos polinomios de grado 3 y 2 respectivamente entonces imitando la idea podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2) \\ &= (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_0+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_1x+ \\ &\quad (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_2x^2 \\ &= (a_0b_0+a_1b_0x+a_2b_0x^2+a_3b_0x^3)+(a_0b_1x+a_1b_1x^2+a_2b_1x^3+a_3b_1x^4)+ \\ &\quad (a_0b_2x^2+a_1b_2x^3+a_2b_2x^4+a_3b_2x^5) \\ &= a_0b_0x^0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2)x^3+ \\ &\quad (a_3b_1+a_2b_2)x^4+a_3b_2x^5 \end{aligned}$$

La idea anterior nos permite generar una definición de polinomios:

Definición 4.1.1.

Si tenemos los polinomios $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$ entonces

$$p(x)\cdot q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_{n+m}x^{n+m} \tag{24}$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 \\ c_1 &= a_1b_0+a_0b_1 \\ c_2 &= a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2 \\ c_3 &= a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general

$$c_s=a_sb_0+a_{s-1}b_1+a_{s-2}b_2+\cdots+a_2b_{s-2}+a_1b_{s-1}+a_0b_s \qquad 0\le s\le n+m$$

Ejemplo 4.1.2.

Si $p(x)=2+5x-4x^3$ y $q(x)=x-7x^2+6x^4$ entonces el producto es el siguiente:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7 \\ &= 0+2x-9x^2-35x^3+8x^4+2x^5+0x^6-24x^7 \\ &= 2x-9x^2-35x^3+8x^4+2x^5-24x^7 \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{array}{rclcr}
c_0 & = & a_0b_0 & = & 0\\
c_1 & = & a_1b_0+a_0b_1 & = & 2\\
c_2 & = & a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2 & = & -9\\
c_3 & = & a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3 & = & -35\\
c_4 & = & a_4b_0+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3+a_0b_4 & = & 8\\
c_5 & = & a_5b_0+a_4b_1+a_3b_2+a_2b_3+a_1b_4+a_0b_5 & = & 2\\
c_6 & = & a_6b_0+a_5b_1+a_4b_2+a_3b_3+a_2b_4+a_1b_5+a_0b_6 & = & 0\\
c_7 & = & a_7b_0+a_6b_1+a_5b_2+a_4b_3+a_3b_4+2_1b_5+a_1b_6+a_0b_7 & = & -24
\end{array}$$

4.2. Propiedades del producto de polinomios.

(1) Propiedad distributiva

Si $p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n$; $q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots+q_mx^m$ y $s(x)=s_0+s_1x+s_2x^2+\cdots+s_tx^t$ donde $n\leq m\leq t$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\cdot q(x) &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}\\
p(x)\cdot s(x) &= d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\cdots+d_{n+t}x^{n+t}
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
c_r &= p_rq_0+p_{r-1}q_1+p_{r-2}q_2+\cdots+p_2q_{r-2}+p_1q_{r-1}+p_0q_r \qquad 0\leq r\leq n+m\\
d_r &= p_rs_0+p_{r-1}s_1+p_{r-2}s_2+\cdots+p_2s_{r-2}+p_1s_{r-1}+p_0s_r \qquad 0\leq r\leq n+t
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
p(x)[q(x)+s(x)] &= (p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n)\cdot[(q_0+s_0)+(q_1+s_1)x+\cdots+(q_t+s_t)x^t]\\
&= u_0+u_1x+\cdots+u_{n+t}x^{n+t} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Donde,

$$u_r=p_r(q_0+s_0)+p_{r-1}(q_1+s_1)+\cdots+p_0(q_t+s_t) \qquad 0\leq r\leq n+t$$

Pero,

$$\begin{aligned}
u_r &= p_r(q_0+s_0)+p_{r-1}(q_1+s_1)+\cdots+p_0(q_t+s_t)\\
&= p_rq_0+p_rs_0+p_{r-1}q_1+p_{r-1}s_1+\cdots+p_0q_t+p_0s_t\\
&= (p_rq_0+p_{r-1}q_1+\cdots+p_0q_t)+(p_rs_0+p_{r-1}s_1+\cdots+p_0s_t)\\
&= c_r+d_r \quad 0\le r\le n+t \qquad (**)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (*) en (**), tenemos que

$$\begin{aligned}
p(x)[q(x)+s(x)] &= u_0+u_1x+\cdots+u_{n+t}x^{n+t}\\
&= (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_{n+t}+d_{n+t})x^{n+t}\\
&= (c_0+c_1x+\cdots+c_{n+t}x^{n+t})+(d_0+d_1x+\cdots+d_{n+t}x^{n+t})\\
&= p(x)q(x)+p(x)s(x)
\end{aligned}$$

Así que

$$p(x)[q(x)+s(x)]=p(x)q(x)+p(x)s(x) \tag{25}$$

(2) Existencia del elemento neutro multiplicativo

Si $e(x)=1$ entonces para cualquier polinomio $p(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
p(x)e(x) &= (p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n)\cdot(1+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n)\\
&= p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n\\
&= p(x)
\end{aligned}$$

(3) Propiedad asociativa

$$[p(x)q(x)]s(x)=p(x)[q(x)s(x)] \tag{26}$$

Es un buen ejercicio!!!

Observación 4.2.1.

Sabemos que para polinomios, el proceso inverso de sumar es restar, es decir, si sumar significa hacer entonces restar significa deshacer y viceversa. Pregunta ¿el producto de polinomios tiene proceso inverso?

La pregunta tiene sentido, pues el concepto de inverso esta ligada directamente a la construcción de algoritmos (procedimientos, fórmulas) que permiten realizar operaciones en forma rápida y eficiente, por ejemplo la fórmula:

$$1 \ dólar = 550 \ pesos \Longleftrightarrow 1 \ peso = \frac{1}{550} \ dólar$$

Nos permite usar sin problemas las monedas dólar y peso indistintamente, pues a la hora de comprar podemos hacer lo siguiente:

Si un articulo vale 300 dólares entonces sacamos la calculadora y hacemos

$$\begin{aligned} 300 \ dólares &= 300 \cdot 1 dólar \\ &= 300 \cdot 550 \ pesos \\ &= 165000 \ pesos \end{aligned}$$

Por el contrario si un articulo vale 165000 pesos y sólo tenemos dólares entonces sacamos la calculadora y hacemos

$$\begin{aligned} 165000 \ pesos &= 165000 \cdot 1 \ peso \\ &= 165000 \cdot \frac{1}{550} \ dólares \\ &= \frac{165000}{550} \ dólares \\ &= 300 \ dólares \end{aligned}$$

Como se ve la existencia de una operación inversa esta ligada a la "resolución de ecuaciones"´es decir, cuando vale la equivalencia en el caso aditivo

$$x + a = b \Longleftrightarrow x = b - a \tag{27}$$

O en el caso multiplicativo

$$ax = b \Longleftrightarrow x = \frac{b}{a} \qquad (a \neq 0) \tag{28}$$

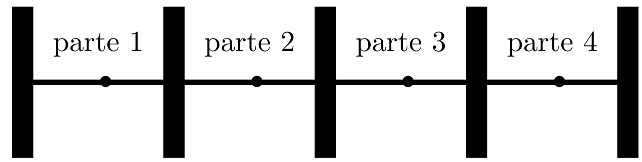
Por ahora seguiremos actuando en forma intuitiva y haremos lo siguiente.

5. Divisibilidad

Idea 1 (Hay que partir de alguna parte)

¿ Qué significa que $\frac{8}{2} = 4$?

(a) Interpretación práctica

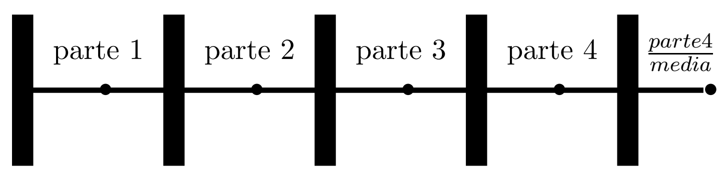


(b) Interpretación básica

$$\begin{array}{rccccc}
 & 8 & : & 2 & = & 4 \\
(-) & 4\cdot 2 & & & & \\
 & - & & & & \\
 & 0 & (\text{resto}) & & &
\end{array}$$

Idea 1' Ahora ¿ Qué significa que $\frac{9}{2} = 4.5$?

(a) Interpretación práctica



(b) Interpretación básica

$$\begin{array}{rccccc}
 & 9 & : & 2 & = & 4 \\
(-) & 4\cdot 2 & & & & \\
 & - & & & & \\
 & 1 & (\text{resto}) & & &
\end{array}$$

Conclusión:

$$8 = 2 \cdot 4 + 0 \qquad \wedge \qquad 9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Equivalentemente

$$\frac{8}{2} = 4 + \frac{0}{2} \qquad \wedge \qquad \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Definición 5.0.2.

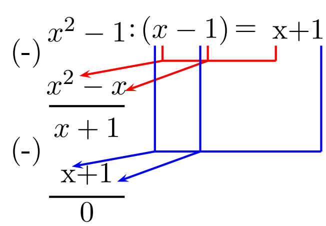
Si n y m son dos números enteros entonces diremos que n divide m si existe un número entero s tal que $m = n \cdot s$. En símbolos podemos escribir como sigue:

$$n|m \iff (\exists s; s \in \mathbb{Z}) \ : \ m = n \cdot s$$

Idea 2 ¿ Cómo generalizar estas ideas ?

Podemos copiar el algoritmo anterior, en algunos casos conocidos:

(a) Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, pues $(x-1)(x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$ entonces



Es decir,

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) + \frac{0}{x-1} \tag{29}$$

(b) Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ o $x = -1$

(c) Si escribimos $f(x) = x^2 - 1$ entonces estamos construyendo una fórmula llamada función que estudiaremos en el capitulo 2, por ahora esta formula funciona como sigue:

(30) $$f(a) = a^2 - 1, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Es decir,

$$\begin{array}{lclcl} f(2) & = & 2^2 - 1 & = & 3 \\ f(-2) & = & (-2)^2 - 1 & = & 3 \\ f(5) & = & 5^2 - 1 & = & 24 \\ f(1) & = & 1^2 - 1 & = & 0 \\ f(-1) & = & (-1)^2 - 1 & = & 0 \\ etc... & & & & \end{array}$$

Observación 5.0.3.

Este concepto será discutido en el capitulo 4

$$\begin{array}{rcl} f(c) = 0 & \Longleftrightarrow & (x-c)|f(x) \\ & \Longleftrightarrow & \textit{el resto de la división} \\ & & f(x) : (x-c) \ \textit{es}\ 0 \end{array}$$

Observación 5.0.4.

Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ *entonces*

(i) $f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + \cdots + a_nc^n$

(ii) $f(c) = 0 \Longleftrightarrow (x-c)|f(x)$

6. Aplicaciones

(1) Factorización.

(a) Descomponer en factores la expresión $x^3 - 1$

Solución:

Si $f(x) = x^3 - 1$ entonces $f(1) = 1^3 - 1 = 0$, luego podemos dividir:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 - 1 : x - 1 = x^2 + x + 1 \\
(-) & \underline{x^3 - x^2} \\
 & x^2 - 1 \\
(-) & \underline{x^2 - x} \\
 & x - 1 \\
(-) & \underline{x - 1} \\
 & 0
\end{array}
$$

Luego,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

(b) Descomponer en factores la expresión $x^3 - y^3$

Solución:

Si $f(x, y) = x^3 - y^3$ entonces $f(y, y) = y^3 - y^3 = 0$, luego podemos dividir:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 - y^3 : x - y = x^2 + xy + y^2 \\
(-) & \underline{x^3 - x^2 y} \\
 & x^2 y - y^3 \\
(-) & \underline{x^2 y - x y^2} \\
 & x y^2 - y^3 \\
(-) & \underline{x y^2 - y^3} \\
 & 0
\end{array}
$$

Luego,

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

(c) En general

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$$

(2) Radicación.

2.1 Precisemos lo que entenderemos por radicación:

$$\text{Si} \quad x^2 = 9 \quad \text{¿Cuánto vale x?}$$

- En primer lugar, buscamos un número que multiplicado por si mismo nos de 9
- Resolver la ecuación significa para nosotros despejar x o "dejar x sola"
- Sabemos que $(x^s)^r = x^{rs}$

  entonces

$$x^2 = 9 \Longrightarrow (x^2)^{\frac{1}{2}} = (9)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow x = (9)^{\frac{1}{2}}$$

2.2 Notación: Raíz cuadrada

$$x^2 = a; \quad a \geq 0 \Longleftrightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow x = \sqrt{a}$$

2.3 Notación: Raíz n-ésima

$$\begin{array}{lll} x^n = a; \quad n \text{ par}; \ a \geq 0 & \Longleftrightarrow & x = \sqrt[n]{a} \\ x^n = a; \quad n \text{ impar} & \Longleftrightarrow & x = \sqrt[n]{a} \end{array}$$

Ejemplo 6.0.5.

(1) $\sqrt{16} = 4$

(2) $\sqrt[3]{-27} = -3$

(3) Factoricemos $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

- $a = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = a^2 \qquad \wedge \qquad b = \sqrt{y} \Longleftrightarrow y = b^2$
- $a^2 - b^2 \ = \ (a-b)(a+b) \ \Longrightarrow \ x - y \ = \ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

  Equivalentemente

$$\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

- Como,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$$

  entonces para $a = x^n$ y $b = y^n$ tenemos la fórmula:

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})((\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}(\sqrt[n]{b}) + (\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{b})^{n-1})$$

  Equivalentemente

$$\frac{a-b}{(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})} = (\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}(\sqrt[n]{b}) + (\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{b})^{n-1} \tag{31}$$

6.1. Ejercicios Propuestos.

(1) **Factorización directa de trinomios**

Descomponga en factores:

(a) $p(x) = x^5 - x$

(b) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

(c) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 10x$

(d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 36$

(e) $p(x, y) = 3xy + 15x - 2y - 10$

(f) $p(x) = 2xy + 6x + y + 3$

(2) **Factorización de trinomios usando sustitución**

Consideremos el trinomio; $p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10$ entonces podemos desarrollar el siguiente procedimiento o algoritmo:

Etapa 1: Sea $u = x - 2$

Etapa 2: Sustituyendo en $p(x)$ tenemos que

$$p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10 \Longleftrightarrow q(u) = u^2 + 3u - 10 \tag{32}$$

Etapa 3: Resolvemos la ecuación de segundo grado para la variable u.

$$\begin{aligned}
q(u) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \frac{-3 \pm 7}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \begin{cases} u = 2 \\ \quad \vee \\ u = -5 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad q(2) = 0 \vee q(-5) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad q(u) = (u-2)(u+5)
\end{aligned}$$

Etapa 4: Volvemos a la variable original y obtenemos:

$$\begin{aligned}
p(x) &= ((x-2)-2)((x-2)+5) \\
&= (x-4)(x+3)
\end{aligned}$$

Usando el procedimiento anterior factorice los siguientes:

(a) $p(x) = (x-3)^2 + 10(x-3) + 24$

(b) $p(x) = (x+1)^2 - 8(x+1) + 15$

(c) $p(x) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) - 28$

(d) $p(x) = (3x-2)^2 - 5(3x-2) - 36$

(e) $p(x) = 6(x-4)^2 + 7(x-4) - 3$

(3) **Planteamiento y resolución de ecuaciones polinomiales**

A modo de ejemplo, consideren el problema:

Una sala de clases posee 78 sillas universitarias. Si el número de sillas por fila es uno más que el doble del número de filas entonces determine el número de filas y de sillas por fila.

Etapa 1: Planteamiento del problema

Si x es la variable que representa el número de filas entonces $x(2x+1)$ representa el número de sillas por fila, así que

$$x(2x+1) = 78 \text{ representa el número total de sillas} \tag{33}$$

Etapa 2: Resolvemos la ecuación $2x^2 + x - 78 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 78 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+624}}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 25}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 6 \vee x = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

Etapa 3: Decidimos la factibilidad de los resultados:

Como el número de filas es un natural, así que desechamos $x = -\dfrac{13}{2}$ y $x = 6$ es el resultado posible y hay 13 sillas por fila.

(a) Determine dos enteros consecutivos cuyo producto sea 72

(b) Determine dos enteros cuyo producto sea 105 y uno de ellos debe ser uno más que el doble del otro.

(c) El perímetro de un rectángulo mide 32 cm y su área es de 60 cm^2. Determine las dimensiones del rectángulo.

(d) Si el largo de un rectángulo excede en 2 cm al triple de su ancho y su área es 56 cm^2. Determine las dimensiones del rectángulo.

(e) La suma de las áreas de dos círculos es 65π centímetros cuadrados. Si el radio del círculo mayor mide un centímetro menos que el doble del radio del círculo menor entonces determine el radio de cada círculo.

(4) **División de polinomios**
Realice las divisiones que se indican:

(a) $(x^2 - 7x - 78) \div (x + 6)$

(b) $(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \div (x^2 + x - 1)$

(c) $(5a^3 + 7a^2 - 2a - 9) \div (a^2 + 3a - 4)$

(d) $(2n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 3n - 4) \div (n^2 + 1)$

(e) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(f) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

(5) **Ecuaciones con radicales**

Resuelva las ecuaciones

(a) $\sqrt{x + 2} = 7 - \sqrt{x + 9}$

(b) $\sqrt{x^2 + 13x + 37} = 1$

(c) $\sqrt{x + 19} - \sqrt{x + 28} = -1$

(d) $\sqrt[3]{x + 1} = 4$

(e) $\sqrt[3]{3x - 1} = -4$

(f) $\sqrt[3]{3x - 1} = \sqrt[3]{2 - 5x}$

7. Preliminares sobre Lógica Matemática

7.1. Contenidos.

(1) Proposiciones

(2) Conectivos

(3) Tablas de verdad

(4) Equivalencia Lógica

(5) Implicación Lógica

(6) Cuantificadores

(7) Demostraciones

7.2. Proposiciones.

Para demostrar que una situación es correcta o incorrecta, deben ocurrir algunas cuestiones que de tan naturales que aparentemente son, ni siquiera nos damos cuenta de su existencia.

En efecto

- Para demostrar la veracidad o falsedad de "algo", debe existir una situación, la cual debe ser decidida de acuerdo a ciertas claves enmarcadas en un sistema comprensible(lógico) para los que están involucrados en el suceso.

- Dicha situación para ser infalible en su decisión, debe poseer dos y sólo dos "opciones de v¿ Inicio del periodo de presentación de antecedentes de parte de los académicos ?erdad",es decir,verdadera o falsa (creíble o no creíble).

- La argumentación total debe estar compuesta de una sucesión de estas situaciones las cuales interactuan armoniosamente, ya sea para obtener un valor de verdad verdadero o un valor de verdad falso.

Definición 7.2.1.

Llamaremos **proposición lógica** a una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero nunca ambas.

Ejemplo 7.2.2.

P: Álgebra es una asignatura anual de Ingeniería Civil en la Usach.

q: $2^3 = 6$

r: Colo Colo es el mejor equipo de fútbol de Chile

Obviamente, p y q son proposiciones y aunque me pese r no es una proposición, pues un hincha de la "u", por ejemplo no comparte mi idea.

7.3. Generación de Proposiciones y Tablas de Verdad.

Si p y q son proposiciones entonces

(1) A cada una por separado le podemos asociar una expresión gráfica o "tabla de verdad"de la forma:

(34)

p
0
1

donde, 0 representa el valor de verdad falso(apagado) y 1 representa el valor de verdad verdadero(encendido).

(2) La proposición negación de p se obtiene con la tabla de verdad:

(35)

p	$\sim p$
0	1
1	0

(3) A partir de p y q podemos obtener las siguientes proposiciones:

- Conjunción o producto lógico de p y q

(36)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Sintetiza el concepto de intersección en el sentido que: $p \wedge q$ será verdadera sólo si p y q lo son simultáneamente.

- Disyunción o suma lógica de p y q

(37)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Sintetiza el concepto de unión en el sentido que: Para que $p \vee q$ sea verdadera basta que una de ellas lo sea.

- Implicación lógica de p y q

(38)

p	q	$p \Longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Sintetiza el concepto de relación causal, en el sentido que $p \Longrightarrow q$ será falsa sólo cuando la hipótesis p es verdadera y la conclusión q es falsa. Caso contrario la nueva proposición es verdadera.

- Bicondicional lógico de p y q

(39)

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Sintetiza el concepto de equivalencia, concepto central en el proceso de clasificación y $p \Longleftrightarrow q$ será verdadera sólo cuando ambas tengan el mismo valor de verdad.

7.4. Tautologías y Contradicciones.

(1) Una proposición se dice compuesta si es formada por más de una proposición.

Ejemplo 7.4.1.

Si p, q y r son proposiciones entonces $a_1 :\ p \wedge (q \wedge r)$ es una proposición compuesta

(2) Una proposición compuesta se llama una Tautología si su valor de verdad es siempre verdadero independiente del valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo 7.4.2. *Tautología*

$$a : \sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$$

En efecto

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1

T

(3) Una proposición compuesta se llama una Contradicción si su valor de verdad es siempre falso independiente del valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo 7.4.3. *Contradicción*

$$a :\ p \wedge \sim p$$

En efecto

p	$\sim p$	p	$\wedge$	$\sim p$
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

C

7.5. Ejercicios Resueltos.

(1) Demuestre que son equivalentes $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de la conjunción)

En efecto

p	q	r	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$	$\Longleftrightarrow$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\wedge r$
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

(2) Demuestre que son equivalentes $p\wedge(q\vee r)$ y $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ (distributividad de la conjunción respecto de disyunción)

En efecto

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$\Longleftrightarrow$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(3) Demuestre que son equivalentes $\sim(p\vee q)$ y $(\sim p\wedge\sim q)$ (ley de De Morgan para la disyunción)

En efecto

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p\wedge\sim q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0

7.6. Ejercicios Propuestos. Demuestre que son tautologías las siguientes proposiciones:

1.	$\sim (p \wedge q)$	$\Longleftrightarrow$	$(\sim p \vee \sim q)$	Ley de De Morgan de la conjunción
2.	$p \wedge q$	$\Longleftrightarrow$	$q \wedge p$	Conmutatividad de la conjunción
3.	$p \vee q$	$\Longleftrightarrow$	$q \vee p$	Conmutatividad de la disyunción
4.	$p \wedge (q \wedge r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \wedge q) \wedge r$	Asociatividad de la conjunción
5.	$p \wedge (q \vee r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividad de la disyunción
6.	$p \wedge p$	$\Longleftrightarrow$	p	Idempotencia de la disyunción
7.	$p \vee p$	$\Longleftrightarrow$	p	Idempotencia de la conjunción
8.	$p \wedge C$	$\Longleftrightarrow$	p	Neutro de la disyunción; C contradicción
9.	$p \wedge T$	$\Longleftrightarrow$	p	Neutro de la conjunción; T tautología
10.	$p \vee \sim p$	$\Longleftrightarrow$	T	Inverso de la disyunción; T tautología
11.	$p \wedge \sim p$	$\Longleftrightarrow$	C	Inverso de la conjunción; C contradicción
12.	$p \wedge T$	$\Longleftrightarrow$	T	Dominación de la disyunción; T tautología
13.	$p \vee C$	$\Longleftrightarrow$	C	Dominación de la conjunción; C contradicción
14.	$p \vee (p \wedge q)$	$\Longleftrightarrow$	p	Absorción de la disyunción
15.	$p \wedge (p \vee q)$	$\Longleftrightarrow$	p	Absorción de la conjunción
16.	$p \Longrightarrow q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$	Contrapositiva de $p \Longrightarrow q$

7.7. Reglas de Inferencia.

Motivación 7.7.1.

El problema puede ser enunciado como sigue:

Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ y q son proposiciones lógicas entonces ¿cuándo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Longrightarrow q \tag{40}$$

Es una tautología?

Existen varias e importantes formas de resolver o demostrar el problema, y dada la importancia de estas leyes las enunciaremos como teoremas

Teorema 7.7.2. **Modus Ponens** *o* **Método de Afirmación**

Si p y q son proposiciones entonces

(41) $$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

es una tautología

En efecto

p	q	$p \Longrightarrow q$	$p \wedge p \Longrightarrow q$	$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Teorema 7.7.3. **Implicación Lógica** *o* **Ley del Silogismo**

Si p, q y r son proposiciones entonces

(42) $$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow p \Longrightarrow r$$

es una tautología

En efecto

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow r$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$	$\Longrightarrow$	$p \Longrightarrow r$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Teorema 7.7.4. **Modus Tollens** *o* **Método de Negación**

Si p y q son proposiciones entonces

(43) $$[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$$

es una tautología

En efecto

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim q$	$(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

Teorema 7.7.5. **Método de Contradicción o Reducción al Absurdo**

Si p es una proposición y C una contradicción entonces

(44)
$$(\sim p \Longrightarrow C) \Longrightarrow p$$

es una tautología

En efecto

p	$\sim p$	C	$\sim p \Longrightarrow F$	$(\sim p \Longrightarrow F) \Longrightarrow p$
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

Corolario 7.7.6.

(45)
$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Longrightarrow q] \Longleftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \sim q) \Longrightarrow C]$$

En efecto

Si hacemos $p = (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$ entonces

$$\begin{aligned} p \Longrightarrow q &\Longleftrightarrow p \wedge \sim q \Longrightarrow q \wedge \sim q \\ &\Longleftrightarrow p \wedge \sim q \Longrightarrow C \end{aligned}$$

7.8. Ejercicios Resueltos.

(1) $[(p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s)] \Longrightarrow (\sim r \Longrightarrow s)$ es una inferencia lógica

En efecto

$$\begin{aligned} (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s) &\Longleftrightarrow \underbrace{(\sim r \Longrightarrow \sim p)}_{\text{contrapositiva}} \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s) \\ &\Longrightarrow \underbrace{(\sim r \Longrightarrow q)}_{\text{silogismo}} \wedge (q \Longrightarrow s) \\ &\Longrightarrow \underbrace{\sim r \Longrightarrow s}_{\text{silogismo}} \end{aligned}$$

(2) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t)] \Longrightarrow u$

En efecto

Si hacemos $w = [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t)]$ entonces

$$
\begin{array}{lll}
w & \Longrightarrow & (p \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t) & \text{silogismo} \\
 & \Longrightarrow & (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge p & [(a \wedge b) \Longrightarrow a]\text{tautología} \\
 & \Longrightarrow & p \wedge (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) & \text{conmutatividad de } \wedge \\
 & \Longrightarrow & r \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) & \text{Modus ponens} \\
 & \Longrightarrow & r \wedge ((\sim r \vee \sim t) \vee u) & \text{Asociatividad de } \vee \\
 & \Longrightarrow & r \wedge (\sim (r \wedge t) \vee u) & \text{De Morgan} \\
 & \Longrightarrow & r \wedge (\sim r \vee u) & [(a \wedge b) \Longrightarrow a]\text{tautología} \\
 & \Longrightarrow & (r \wedge \sim r) \vee (r \wedge u) & \text{distributividad de } \wedge \text{ en } \vee \\
 & \Longrightarrow & C \vee (r \wedge u) & \text{ley del inverso} \\
 & \Longrightarrow & r \wedge u & \text{ley del neutro} \\
 & \Longrightarrow & u & [(a \wedge b) \Longrightarrow b]\text{tautología}
\end{array}
$$

7.9. Ejercicios Propuestos.

(1) Demuestre usando tablas de verdad que son válidas (tautologías) las proposiciones siguientes:

(a) $[p \wedge (p \Longrightarrow q) \wedge r] \Longrightarrow [(p \vee q) \Longrightarrow r]$

(b) $[(p \wedge q) \Longrightarrow r] \wedge \sim q \wedge (p \Longrightarrow \sim r)] \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(c) $[[p \vee (q \vee r)] \wedge \sim q] \Longrightarrow (p \vee r)$

(d) $[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$

(e) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$

(f) $[(p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow [(p \vee q) \Longrightarrow r]$

(g) $(p \wedge q) \Longrightarrow p$

(h) $p \Longrightarrow (p \vee q)$

(i) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Longrightarrow (q \vee s)$

(j) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow (\sim p \vee \sim r)$

(2) Demuestre justificando paso a paso, (usando propiedades no tablas de verdad)las siguientes proposiciones:

(a) $[p \wedge (q \wedge r)] \Longrightarrow \sim [p \vee (q \wedge r)]$

(b) $[((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)] \Longrightarrow p$

(c) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \vee s) \wedge (p \vee r)] \Longrightarrow (\sim q \Longrightarrow s)$

(d) $[(p \wedge \sim q) \wedge r] \Longrightarrow [(p \wedge r) \vee q]$

(e) $[p \wedge (p \Longrightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)] \Longrightarrow r$

(f) $[(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \wedge (\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge p] \Longrightarrow r$

7.10. Uso de Cuantificadores.

Una forma natural de generar proposiciones es a través de fórmulas para hacer proposiciones, como por ejemplo:

(1) $p(x)$: x es un natural mayor que 3

En este caso

Si notamos por I el conjunto de naturales x para los cuales $p(x)$ es verdadera y por O el conjunto de naturales x para los cuales $p(x)$ es falsa entonces

$$\begin{array}{rcccl} I & = & \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \text{ verdadera}\} & = & \{4,5,6,\dots\} \\ O & = & \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \text{ falsa}\} & = & \{1,2,3\} \end{array} \tag{46}$$

(2) $q(x,y) : x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1$

En este caso

I es como veremos más tarde es un circulo con centro en $(0,0)$ y radio 1 y O es el resto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$

Definición 7.10.1.

$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama una fórmula proposicional definida en un conjunto A si:

- Cada x_i para $1 = 1, 2, \dots, n$ son variables en A, es decir pueden tomar valores en el conjunto A.
- Para cada sustitución de las variables en A la fórmula se transforma en una proposición lógica.

Ejemplo 7.10.2.

(1) Ya observamos que $[p(x) : x$ es un natural mayor que $3]$, es una fórmula proposicional y en particular tenemos:

(a) p(1) es falsa

(b) p(2) es falsa

(c) p(3) es falsa

(d) p(x)es verdadera para cada $x \in \mathbb{N}$ y $x \geq 4$

Así $p(x)$ es verdadera para algunos números naturales y también $p(x)$ es falsa para algunos números naturales.

Definición 7.10.3.

Si $p(x)$ es una fórmula proposicional entonces

- " Para algún x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\exists x; p(x)]$.
- " Para un único x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\exists!\, x; p(x)]$.
- " Para todo x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\forall x; p(x)]$

Ejemplo 7.10.4.

Definamos en $\mathbb{R}$ las proposiciones:

(1) $p(x) : x \geq 0$

(2) $q(x) : x^2 \geq 0$

(3) $r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0$

(4) $s(x) : x^2 - 3 > 0$

entonces

(a) $\exists x : (p(x) \wedge r(x))$ es verdadera, pues existe $4 \in \mathbb{R}$ tal que $p(4)$ y $r(4)$ son verdaderas.

(b) $\forall x : (p(x) \Longrightarrow q(x))$ es verdadera, pues para cualquier valor real a, $q(a)$ es verdadera.

(c) $\forall x : (q(x) \Longrightarrow s(x))$ es falsa, pues por ejemplo $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa.

La siguiente tabla especifica el comportamiento de los cuantificadores $(\exists)$ y $(\forall)$

Proposición	Verdadera	Falsa
$\exists x : p(x)$	Para al menos un a, $p(a)$ es verdadera	Para cada a, $p(a)$ es falsa
$\forall x : p(x)$	Para cada a, p(a) es verdadera	Existe a tal que $p(a)$ es falsa
$\exists x :\sim p(x)$	Existe a tal que $p(a)$ es falsa	Para cada a, $p(a)$ es verdadera
$\forall x :\sim p(x)$	Para cada a, $p(a)$ es falsa	Existe a tal que $p(a)$ es verdadera

CAPITULO 2

Aritmética Natural

1. Contenidos

- Introducción[1]
- Sumatorias
- Inducción Matemática
- Progresiones
- Teorema del Binomio

2. Introducción

(1) Asumiremos que el conjunto de números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado completo .

Después de esa suposición podemos garantizar la existencia del neutro aditivo "0" y el neutro multiplicativo "1" en $\mathbb{R}$. Así que podemos sumar estos elementos a voluntad, es decir:

$$\{0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R} \tag{47}$$

La idea más básica posible, para definir el conjunto de números naturales es motivada por (47), en esa dirección hacemos.

Definición 2.0.5. *Diremos que un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ será llamado " Conjunto Inductivo " si:*

- $1 \in I$
- $k \in I \Longrightarrow k+1 \in I$

Ejemplo 2.0.6.

- $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^+ - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ *son conjuntos inductivos.*
- $\mathbb{R} - \{10\}$ *no es conjunto inductivo.*

Lema 2.0.7.

Si A y B son conjuntos inductivos entonces $A \cap B$ es un conjunto inductivo

En efecto

- *Por demostrar que (p.d.q.):*

[1] Para profundizar lo dicho en este capitulo les sugiero ver [**2**], Mi Profesor y Amigo Q.E.D.

- $1 \in A \cap B$

- $k \in A \cap B \Longrightarrow (k+1) \in A \cap B$

- *Información (datos, input):*

  - A *inductivo* $\Longrightarrow \begin{cases} 1 \in A \\ k \in A \Longrightarrow (k+1) \in A \end{cases}$
  - B *inductivo* $\Longrightarrow \begin{cases} 1 \in B \\ k \in B \Longrightarrow (k+1) \in B \end{cases}$

- *Demostración propiamente tal:*

  Como, $A \cap B = \{u \mid u \in A \wedge u \in B\}$ *entonces del item Información, sigue que:*

  - $1 \in A \wedge 1 \in B \Longrightarrow 1 \in A \cap B$

  - $k \in A \cap B \Longrightarrow k \in A \wedge k \in B \Longrightarrow (k+1) \in A \wedge (k+1) \in B \Longrightarrow (k+1) \in A \cap B$

- *Lo que demuestra que* $A \cap B$ *es un conjunto inductivo.*

Definición 2.0.8.

Llamaremos conjunto de números naturales, $\mathbb{N}$ *a la intersección de todos los conjuntos inductivos de* $\mathbb{R}$*, es decir.*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \cap\{I \ : \mid I \subset \mathbb{R},\ I \ \textit{inductivo}\ \} \\ &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \end{aligned}$$

(2) Llamaremos una sucesión de números reales a una " regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de $\mathbb{N}$ con números reales". En los capitulos siguientes nos referiremos latamente a este tipo de reglas las cuales las agruparemos bajo el concepto de relación. Por el momento notarems a las sucesiones como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & f(n) = f_n \end{array}$$

Ejemplo 2.0.9.

(a) *Si* $f_n = n + 1$ *entonces los posibles valores de esta sucesión son del tipo:*

$Img(f) = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ *donde Img significa imagen de la sucesión*

(b) *Si* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *entonces los posibles valores de la sucesión son:*

$$Img(a) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

(c) *Adoptaremos la notación:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \vee \qquad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = Img(f)$$

3. Inducción

3.1. Objetivos.

Que el Estudiante:

(1) Se familiarice con el uso del Símbolo de Sumatoria.
(2) Comprenda que en esta primera instancia el Símbolo de Sumatoria, aparece como una opción que permite simplificar la escritura de grandes volúmenes de datos, para facilitar la propia comprensión de estos.
(3) Use el Método de Inducción para verificar propiedades algebraicas.
(4) En forma natural observe que el símbolo de Sumatoria junto al Método de Inducción se constituyen en una herramienta eficaz, que permite manipular de manera eficiente situaciones de una mayor complejidad

Esta sección estará basada en los siguientes principios básicos:

Teorema 3.1.1. *Principio de Inducción.*

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $F(k)$ una fórmula proposicional, es decir $F(k)$ puede ser verdadera o falsa en k, (sólo una de ambas) y supongamos que F satisface las propiedades:

- *$F(1)$ es verdadera*
- *$F(k)$ verdadera implica que $F(k+1)$ es verdadera, para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces*

$F(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$

En efecto

- p.d.q. $F(k)$ es verdadera $(\forall k; k \in \mathbb{N})$
- Datos
  - $F(1)$ es verdadera
  - $k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad F(k)$ verdadera $\Longrightarrow F(k+1)$ verdadera
- Demostración propiamente tal:
  (1) Basta mostrar que el conjunto

$$I = \{k \in \mathbb{R} \mid F(k) \text{ es verdadera } \} \tag{48}$$

Es inductivo.

¿ Por qué ?

Por lo siguiente:

– $\mathbb{N} = \cap\{I \ : \mid I \subset \mathbb{R},\ \text{I inductivo }\} \Longrightarrow \mathbb{N} \subset I \quad (\forall I; I \text{ inductivo})$

– Luego si vale para (48) entonces vale para $\mathbb{N}$

(2) Manos a la obra:

De los datos sigue que:

(a) $1 \in I$ ($F(1)$ es verdadera)

(b) Si $K \in I$ entonces $F(k)$ es verdadera y luego $F(k+1)$ es verdadera, es decir $(k+1) \in I$.l

- Finalmente I es inductivo y $F(k)$ es verdadera $(\forall k; k \in \mathbb{N})$

Teorema 3.1.2. *Teorema de Recurrencia*

Sea $x \in \mathbb{R}$ y g una función definida sobre $\mathbb{R}$ y con valores reales entonces existe una única sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

- $a_1 = x$
- *Para cada n, $a_{n+1} = g(a_n)$*

Ejemplo 3.1.3.

(1) *Construcción de potencias.*

Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario y define la función real a valores reales, $g(r) = r \cdot x$, $(\forall r; r \in \mathbb{R})$ entonces existe una única función a tal que:

(a) $a(1) = x$

(b) $a(n+1) = g(a(n)) = a(n) \cdot x$

(c) *Así tenemos*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a(1) & = & x \\
a(2) & = & a(1+1) & = & g(a(1)) & = & a(1)\cdot x & = & x\cdot x & = & x^2 \\
a(3) & = & a(2+1) & = & g(a(2)) & = & a(2)\cdot x & = & x^2\cdot x & = & x^3 \\
a(4) & = & a(3+1) & = & g(a(3)) & = & f(3)\cdot x & = & x^3\cdot x & = & x^4 \\
\vdots \\
a(n+1) & = & a(n+1) & = & g(a(n)) & = & a(n)\cdot x & = & x^n\cdot x & = & x^{n+1}
\end{array}$$

Definición 3.1.4. *Potencias de un real*

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos $x^1 = x$ y $x^{n+1} = x^n \cdot x$

(2) *Costrucción de factoriales.*

$1! = 1$
$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Luego,

$2! = 1 \cdot 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
$\vdots$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$

Definición 3.1.5. *Factoriales*

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n!$, se llama n-factorial.

(3) *Construcción de sumatorias*

Dada una sucesión de números reales $(a_i)_{i\in\mathbb{N})}$, podemos construir una nueva sucesión usando recurrencia, como sigue:

(a) $s_1 = a_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i$

(b) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$

Luego, tenemos la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.1.6. *Dada una sucesión de números reales $(a_i)_{i\in\mathbb{N})}$, entonces*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{49}$$

Se llama la sumatoria de los primeros n-números de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

(4) *Construcción de Progresiones aritméticas*

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}$ define por recurrencia la sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d; \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Definición 3.1.7. $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, \} \subset \mathbb{R}$, *será llamada una Progresión Aritmética de diferencia d si*

$$a_{n+1} = a_n + d; \quad n \in \mathbb{N} \tag{50}$$

(5) *Construcción de Progresiones geométricas*

Dado $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$ define por recurrencia la sucesión:

$$\begin{array}{lcll} a_1 & = & x & \\ a_{n+1} & = & a_n \cdot r & \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Definición 3.1.8. *$G = \{a_1, a_2, a_3, \dots,\} \subset \mathbb{R}$, será llamada una Progresión Geométrica de razón $r \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ si*

(51) $$a_{n+1} = a_n \cdot r \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(6) *Construcción de matrices:*

(a) *Matriz fila o columna (ciclo de largo n)*

Consideramos una sucesión $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ entonces podemos construir una fila o columna como sigue:

Para una fila tenemos.

- $a_{1j} = a_j$, *para* $j = 1, 2, 3, \dots, n,$
- *F:=*$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ *o*

Para una columna tenemos:

- $a_{i1} = a_i$, *par* $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- *C:=*$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$

(b) *En realidad esta implícito el concepto de sucesión doble "a_{ij}", sin embargo podemos hacer la siguiente construcción:*

Dados $n \cdot m$ elementos en $\mathbb{R}$, los ordenamos por como sigue:

(1) a_{ij} *para* $i = 1, 2, 3, \dots, n$ *y* $j = 1, 2, 3, \dots, m$

(2) *Para* $i = 1$*:*

(3) *Si* $\begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots m \text{ copia } a_{ij} \\ \text{caso contrario vaya a (4)} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \text{si } i = 1, 2, 3, \dots n & \text{hacer } i = i + 1 \text{ e ir a } (3) \\ \text{caso contrario} & \text{fin} \end{cases}$

Luego, lo que conseguimos es lo siguiente:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{52}$$

Definición 3.1.9. *Una expresión del tipo (52), será llamada una matriz real de n-filas y m-columnas (orden $n \times m$)*

El conjunto de matrices lo notaremos como sigue:

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) = \{ \text{ matrices de orden } n \times m\} \tag{53}$$

3.2. Propiedades de las sumatorias.

Si $(a_i)_{(1\leq i\leq n)}$ y $(b_i)_{(1\leq i\leq n)}$son dos sucesiones reales entonces:

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

En efecto

- p.d.q. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- Datos:
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n$
- Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

(2) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

En efecto

- p.d.q. : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$
- Datos : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n$
- Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i &= c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n \\
&= c \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdot + ca_n) \\
&= c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i \quad 1 \leq s \leq n$

En efecto

- p.d.q. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i$
- Datos : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
- Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n \\
&= \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$ (Propiedad Telescópica)

(5) $\displaystyle\sum_{i=s}^{r} a_i = \sum_{i=s+t}^{r+t} a_{i-t}$ (Propiedad del reloj)

Ambas se las dejo como ejercicio.

3.3. Ejercicios Resueltos de Sumatorias.

(1) Calcule la siguiente sumatoria :

(54) $$S=\sum_{j=1}^{100} 3$$

Solución

(i) Por definición de sumatoria sabemos que

(55) $$\sum_{i=1}^{100} a_i = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$$

(ii) El punto (55), motiva definir, la siguiente fórmula:

(56) $$a_i = 3 \;\text{ para i=1,2,3,\ldots,100 ; este es el rango de variación de i}$$

Es decir,

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 3 \\ a_2 & = & 3 \\ & \vdots & \\ a_{100} & = & 3 \end{array}$$

(iii) Finalmente, aplicando (55) y (56) en (54) tenemos:

$$\begin{array}{rcll} S & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{100} 3 & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{100} a_i & \textit{ver} \quad (56) \\ & = & a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100} & \textit{ver} \quad (55) \\ & = & 3+3+\cdots+3 \quad (100- \text{ veces}) & \\ & = & 300 & \end{array}$$

La primera conclusión que se puede obtener de (54), es que podemos cambiar o substituir el número 3 o mejor la constante 3, por cualquier otra constante c, lo mismo que el natural 100, puede ser cambiado por un natural $n \in \mathbb{N}$. Así por ejemplo:

- Para $c=1$ y $n \in \mathbb{N}$

(57) $$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1\cdots+1}_{(n\ veces)} = 1\cdot n = n$$

– En general, para $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n \tag{58}$$

(2) Calcule la siguiente sumatoria

$$S = \sum_{i=1}^{9} (2+3i) \tag{59}$$

<u>Solución</u>

(i) Por definición de sumatoria sabemos que

$$\sum_{i=1}^{9} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 \tag{60}$$

(ii) El punto (60), motiva definir, la siguiente fórmula:

$$a_i = (2+3i) \quad \text{para i=1,2,3,\ldots,9 ;este es el rango de variación de i} \tag{61}$$

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2+3\cdot 1 \\ a_2 & = & 2+3\cdot 2 \\ & \vdots & \\ a_9 & = & 2+3\cdot 9 \end{array}$$

y

(iii) Finalmente, aplicando (60) y (61) en (59) tenemos:

$$\begin{array}{rcll} S & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{9} (2+3i) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{9} a_i & ver(\ 61) \\ & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 & ver(\ 60) \\ & = & (2+3\cdot 1) + (2+3\cdot 2) + \cdots + (2+3\cdot 9) & \\ & = & 18 + 3\cdot 45 & \\ & = & 153 & \end{array}$$

Si observamos la solución del problema anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{9}(2+3i) \\
&= \sum_{i=1}^{9} a_i \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 \\
&= (2+3\cdot 1) + (2+3\cdot 2) + \cdots + (2+3\cdot 9) \\
&= \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\text{9 - veces}} + 3\cdot(1+2+3\cdot+9) \\
&= \sum_{i=1}^{9} 2 + 3\cdot\sum_{i=1}^{9} i \\
&= 2\cdot 9 + 3\cdot 45
\end{aligned}$$

Así que, usando la definición de sumatoria es posible resolver los problemas, pero usando sus propiedades se ocupa menor tiempo.

(3) Supongamos verdaderas en $\mathbb{N}$, las siguientes fórmulas:

(1) " Suma de los primeros n-números naturales "

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{62}$$

(2) " Suma de los primeros n-cuadrados de naturales "

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{63}$$

(3) " Suma de los primeros n-cubos de naturales "

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{64}$$

(i) Calcule

$$S = \sum_{i=8}^{100} i \tag{65}$$

<u>Solución</u>

$$\sum_{i=1}^{100} i = \underbrace{1+2+3+\cdot+7}_{\sum\limits_{1=1}^{7}} + (8+9+10+\cdot+100)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{7} i &= (8+9+10+\cdot+100) \\ &= \sum_{i=8}^{100} i \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{7} i \\ &= \frac{100(100+1)}{2} - \frac{7(7+1)}{2} \\ &= 50 \cdot 101 - 7 \cdot 4 \\ &= 5050 - 28 \\ &= 5022 \end{aligned}$$

Conclusión:

(66) $$\sum_{i=m}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{m-1} i \qquad \text{para } m < n$$

(ii) Calcule

(67) $$S = \sum_{i=12}^{20} (i^3 - 5i^2 + 3i - 4)$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=12}^{20}(i^3-5i^2+3i-4) &= \sum_{1=12}^{20} i^3 - 5\sum_{i=12}^{20} i^2 + 3\sum_{i=12}^{20} i - 4\sum_{i=12}^{20} 1 \\
&= \\
&= \left[\sum_{i=1}^{20} i^3 - \sum_{i=1}^{11} i^3\right] - 5\left[\textstyle\sum_{i=1}^{20} i^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{11} i^2\right] + \\
& \quad 3\left[\sum_{i=1}^{20} i - \sum_{i=1}^{11} i\right] - 4\left[\sum_{i=1}^{20} 1 - \sum_{i=1}^{11} 1\right] \\
&= \left[\tfrac{20\cdot 21}{2}\right]^2 - \left[\tfrac{11\cdot 12}{2}\right]^2 - 5\left[\tfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6}\right] + \\
& \quad 5\left[\tfrac{11\cdot 12\cdot 23}{6}\right] + 3\left[\tfrac{20\cdot 21}{2}\right] - 3\left[\tfrac{11\cdot 12}{2}\right] - \\
& \quad 4\left[20-11\right] \\
&= 28320
\end{aligned}
$$

(4) Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= 1+2+3+\cdots+n \\
&= (n-0)+(n-1)+\cdots+(n-(n-2))+(n-(n-1)) \\
&= (n+1-1)+(n+1-2)+\cdots+(n+1-(n-1))+(n+1-n) \\
&= \underbrace{n+1}_{\text{n-veces}} -(1+2+3\cdots+n) \\
&= n(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i
\end{aligned}
$$

Así que,

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

Y luego,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alternativa,

(68) $$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 - i^2 = (n+1)^2 - 1 \qquad \text{(Propiedad telescópica)}$$

Pero,

(69) $$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 - i^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i+1) \qquad \text{(suma por su diferencia !)}$$

Igualando términos en (68) y (69), tenemos que;

$$2\sum_{i=1}^{n} i + n = (n+1)^2 - 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Podemos usar directamente esta propiedad para calcular:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

En efecto

Alternativa 1:

Sea $u = i - 1$ entonces $i = 1, 2, \dots, n \Longrightarrow u = 0, 1, 2, 3 \dots, (n-1)$, así que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{u=0}^{n-1} u \\ &= \sum_{u=1}^{n-1} u \\ &= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{n^2+n-2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

(5) Demuestre que

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \qquad a \neq 1 \wedge a \neq 0 \qquad (\star)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
(a-1)\sum_{i=0}^{n} a^i &= \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} a^i \\
&= (a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n + a^{n+1}) - (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n) \\
&= a^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Luego, despejando tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \tag{70}$$

Ahora use $(\star)$, para calcular

$$S = \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}
\end{aligned}$$

Aplicando directamente $(\star)$ para $a = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\left[\frac{1}{2}\right]^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\left[\frac{1}{2}\right]^{100}-1}{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{100}
\end{aligned}$$

3.4. Ejercicios Propuestos de Sumatorias.

(1) Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} 3(i^2-1)$

(2) Calcule:

- $\displaystyle\sum_{i=10}^{25} i$
- $\displaystyle\sum_{i=10}^{25} u$
- $\displaystyle\sum_{i=4}^{12} i^3$

(3) Calcule la sumatoria:

$$S=\sum_{i=10}^{40} i(i+1)^2$$

(4) Si

$$a_k=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^k & : \quad 1\leq k<100\\ (k+1)^2 & : 100\leq k\leq 200\end{cases}$$

entonces calcule la sumatoria

$$S=\sum_{k=1}^{200} a_k$$

(5) Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=\frac{n(3n-1)}{2} \qquad (\forall n; n\in\mathbb{N})$$

3.5. Ejercicios Resueltos de Inducción.

(1) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$$F(n): \qquad \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}.\ \text{Es verdadera } (\forall n; n\in\mathbb{N})$$

Solución

(i) **Verificamos que $F(1)$ es verdadera**.

Por una parte $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i=1$ y por otra $\frac{1(1+1)}{2}=1$. Así que

(71) $$\sum_{i=1}^{1} i=\frac{1(1+1)}{2}$$

Luego, de (71) sigue que $F(1)$ es verdadera

.

(ii) **Hipótesis de Inducción**.

$F(k)$, es verdadera. Es decir,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (H)$$

(iii) **Tesis de Inducción**.

Por demostrar que (p.d.q) $F(k+1)$, es verdadera. Es decir p.d.q.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\\ &= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

En efecto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=k+1}^{k+1} i\\ &\overset{(H)}{=} \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\\ &= \tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$, es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(2) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$F(n):\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

Por una parte;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1} i2^{i-1} &= 1 \cdot 2^0\\ &= 1\end{aligned}$$

Por otra parte;

$$\begin{aligned}1 + (1-1)2^1 &= 1 + 0 \cdot 2\\ &= 1\end{aligned}$$

Así que,

$$\sum_{i=1}^{1} i2^{i-1} = 1 + (1-1)2^1$$

Luego, $F(1)$ es verdadera

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

$F(k)$ es verdadera.

Esto es.

$$\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1} = 1 + (k-1)2^k \qquad (H)$$

es verdadera.

Etapa 3. Tesis de Inducción

Por demostrar que $F(k+1)$ es verdadera

e.e p.d.q.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i2^{i-1} = 1 + k2^{k+1}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i2^{i-1} &= \sum_{i=1}^{k} i2^{i-1} + (k+1)2^k \\ &\overset{(H)}{=} 1 + (k-1)2^k + (k+1)2^k \\ &= 1 + 2k2^k \\ &= 1 + k2^{k+1} \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(3) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional.

$F(n): \qquad 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

(i) **Verificamos que $F(1)$ es verdadera**.

$$\begin{aligned} 10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 &= 10 + 3 \cdot 64 + 5 \\ &= 10 + 192 + 5 \\ &= 207 \\ &= 9 \cdot 23 \end{aligned}$$

Así que, $F(1)$ es verdadera.

(ii) **Hipótesis de Inducción**.

$F(k)$, es verdadera. Es decir, existe un elemento numérico que depende de la posición k, diagamos $q(k)$ tal que:

$$10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9 \cdot q(k) \qquad (H)$$

(iii) **Tesis de Inducción**.

Por demostrar que (p.d.q) $F(k+1)$, es verdadera. Es decir p.d.q. existe $q(k+1)$ tal que

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{(k+1)+2} + 5 = 9 \cdot q(k+1)$$

En efecto

La "filosofía" que se puede emplear para resolver este tipo de problemas es la siguiente:

(1) Hacemos la división entre $10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5$ y $10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5$. Es decir

$$\begin{array}{rll} & 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 & : \ 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 10 \\ (-) & & \\ & \underline{10^{k+1} + 30 \cdot 4^{k+2} + 50} & \\ & -18 \cdot 4^{k+2} - 45 & \end{array}$$

(2) Luego, aplicando la definición de división tenemos:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 &= 10[10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5] + [-18 \cdot 4^{k+2} - 45] \\ &\overset{(H)}{=} 10[9 \cdot q(k)] + 9[-2 \cdot 4^{k+2} - 5] \\ &= 9[10 \cdot q(k)] + 9[-2 \cdot 4^{k+2} - 5] \\ &= 9([10 \cdot q(k)] + [-2 \cdot 4^{k+2} - 5]) \\ &= 9\underbrace{(10 \cdot q(k)] - 2 \cdot 4^{k+2} - 5)}_{q(k+1)} \\ &= 9 \cdot q(k+1) \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$, es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

3.6. Ejercicios Propuestos de Inducción.

Demuestre usando Inducción matemática que son verdaderas $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(1) $F(n): \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $F(n): \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(3) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}$

(4) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (3i-1) = \frac{n}{2}(3n+1)$

(5) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{3^n-1}{2}$

(6) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(7) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$

(8) $F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

(9) $F(n): \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(10) $F(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(11) $F(n): \quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(12) $F(n): \quad 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

(13) $F(n): \quad 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(14) $F(n)$: $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x-y)$

(15) $F(n)$: $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $(x+y)$

(16) $F(n)$: $n^3 + 2n$ es divisible por 3

(17) $F(n)$: $2^n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3

(18) $F(n)$: $10^n + 3\cdot 4^{n+1} + 5$ es divisible por 9

(19) $F(n)$: $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13

(20) $F(n)$: $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64

(21) $F(n)$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$, si $x \geq -1$

4. Progresiones

4.1. Objetivos.

Que el Estudiante:

(1) Este en condiciones de verificar que un conjunto de números satisface las propiedades que definen a una progresión aritmética o geométrica.

(2) En forma natural observe que el ordenamiento de los elementos de un conjunto en progresión permite obtener rápida y eficientemente por ejemplo: cada término en forma independiente o determinar la suma de sus elementos en cualquier instante.

4.2. Propiedades de las progresiones aritméticas.

(1) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N}$$

En efecto

- p.d.q. $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N}$
- Datos

  Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, una Progresión Aritmética de diferencia d entonces de (50) tenemos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Luego, el método sugerido es Inducción, para probar que la fórmula F(s): $\quad a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N}$, es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$.Así que:
  - p.d.q. F(1) es verdadera.

    $a_{1+1} = a_2 = a_1 + d.$

    Así que F(1) es verdadera
  - Hipótesis de Inducción:

    Suponemos que F(k) es verdadera, es decir

$$a_k = a_1 + (k-1)d \qquad\qquad (H)$$

  - Tesis de Inducción:

    p.d.q. F(k+1) es verdadera

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &\stackrel{(H)}{=} a_1 + (n-1)d + d \\ &= a_1 + nd \end{aligned}$$

  - Así F(k+1) es verdadera.
- Luego,

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot\ d \qquad\qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(2) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces la suma de los n-primeros términos se obtiene de la fórmula.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \\ \quad \vee & \\ \frac{n}{2}(a_1 + a_n) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

En efecto

- p.d.q. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
- Datos

  $a_n = a_1 + (n-1)d$
- Demostración, hacemos inducción para concluir que la fórmula es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$:

  F(n): $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
  - p.d.q. F(1) es verdadera

    Por una parte:
    $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ y por otra parte; $\frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)d) = \frac{1}{2} \cdot 2a_1 = a_1$,
    Así que F(1) es verdadera.
  - Hipótesis de inducción:

    suponemos que F(k) es verdadera, es decir:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) \qquad (H)$$

  - Tesis de inducción: p.d.q. F(k+1) es verdadera.

    En efecto

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} \\
&\overset{(H)}{=} \tfrac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + a_{k+1} \\
&= \tfrac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + (a_1 + kd) \\
&= \tfrac{2ka_1 + k^2d - kd + 2a_1 + 2kd}{2} \\
&= \tfrac{2a_1(k+1) + k(k+1)d}{2} \\
&= \tfrac{(k+1)}{2}[2a_1 + kd]
\end{aligned}
$$

– Así, F(k+1) es verdadera.

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

En particular, como $a_1 + (n-1)d = a_n$ entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= \tfrac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\
&= \tfrac{n}{2}(a_1 + [a_1 + (n-1)d]) \\
&= \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}
$$

(3) En particular, como aplicación inmediata tenemos que la suma de los n-primeros naturales es:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \tfrac{n}{2}(1 + (n-1)\cdot 1) \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

4.3. Propiedades de las progresiones geométricas.

(1) Si $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Geométrica de razón r entonces:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(2) $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right] \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Las demostraciones son ejercicios.

4.4. Ejercicios Resueltos de Progresión Aritmética.

(1) La suma de tres números en progresión aritmética (p.a) es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números.

Solución

Una estrategia para resolver este tipo de problemas puede seguir la siguiente rutina:

- **Resolvemos el problema en abstracto, es decir, suponemos que los números x, y, z son la solución del problema**.

  Ahora matematizamos el problema, sea

$$A = \{x, y, z\} \tag{72}$$

  el conjunto que posee los números pedidos

- " Obligamos al conjunto A", que satisfaga las propiedades del problema:
  - A es una p.a. si y sólo si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $y = x + d$ y $z = x + 2d$. Así sustituyendo en (72) tenemos

$$A = \{y - d, y, y + d\} \tag{73}$$

  - Sabemos que $x + y + z = 27$ y entonces:

$$\begin{aligned} y - d + y + y + d &= 27 \\ 3y &= 27 \\ y &= 9 \end{aligned} \tag{74}$$

  - Sustituyendo el valor de y obtenido en (74) en (73), tenemos

$$A = \{9 - d, 9, 9 + d\} \tag{75}$$

  - Sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 293$ y entonces:

$$\begin{aligned} (9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 &= 293 \\ d^2 &= 25 \\ d &= \pm 5 \end{aligned} \tag{76}$$

- Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (76) en (75), obtenemos:

  Caso 1. $d = 5$

$$A = \{9 - 5, 9, 9 + 5\} = \{4, 9, 14\}$$

  Caso 2. $d = -5$

$$A = \{9 - (-5), 9, 9 + (-5)\} = \{14, 9, 4\}$$

(2) Si en una p.a. el quinto término es 15 y el décimo es 30 entonces determine la p.a.

Solución

- Sea

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \tag{77}$$

  la p.a. pedida.

- Si A en (77) es la p.a. pedida entonces los a_i, verifican la siguiente propiedad genérica:

(78)
$$a_{i+1} = a_1 + i \cdot d \qquad (\forall i; i \geq 1)$$

- En particular, $a_5 = a_1 + 4d$ y $a_{10} = a_1 + 9d$. Así que matematizando el problema tenemos:

(79)
$$\left.\begin{array}{r} a_1 + 4d = 15 \\ a_1 + 9d = 30 \end{array}\right| \Longrightarrow d = 3 \quad \wedge \quad a_1 = 3$$

- Sustituyendo los resultados obtenidos en (79) en (77), obtenemos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$$

(3) La suma de tres números en progresión geomtŕica (p.g) es 26 y su producto es 216. Determine tales números.

Solución

(i) Sea

(80)
$$G = \{x, y, z\}$$

el conjunto que posee los números pedidos

(ii) " Obligamos al conjunto G", que satisfaga las propiedades del problema:

- G es una p.g. si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y $r \neq 1$ tal que $y = x \cdot r$ y $z = x \cdot 2r$. Así sustituyendo en (80) tenemos

(81)
$$G = \{\frac{y}{r}, y, y \cdot r\}$$

- Sabemos que $x \cdot y \cdot z = 216$ y entonces:

(82)
$$\begin{array}{rcl} \frac{y}{r} \cdot y \cdot (y \cdot r) & = & 226 \\ y^3 & = & 216 \\ y & = & 6 \end{array}$$

- Sustituyendo el valor de y obtenido en (82) en (81), tenemos

(83)
$$G = \{\frac{6}{r}, 6, 6 \cdot r\}$$

- Sabemos que $x + y + z = 26$ y entonces:

(84)
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{6}{r} + 6 + 6 \cdot r & = & 26 \\ 6 + 6r + 6r^2 & = & 26r \\ 3r^2 - 10r + 3 & = & 0 \\ r = 3 \quad \vee \quad r = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

(iii) Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (84) en (83), obtenemos:

Caso 1. $r = 3$

$$A = \{2, 6, 18\}$$

Caso 2. $d = \dfrac{1}{3}$

$$A = \{18, 6, 2\}$$

(4) La suma de tres números en p.a. es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una p.g. Determine ambas progresiones.

Solución

- Sean

$$A = \{x, y, z\} \tag{85}$$

$$G = \{x + 1, y + 5, z + 29\} \tag{86}$$

La p.a. y p.g. pedidas respectivamente.

- Según los datos la matemática involucrada es la siguiente:
  - A es una p.a. si y sólo si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $y = x + d$ y $z = x + 2d$. Así sustituyendo en (85) y (86) tenemos

$$A = \{y - d, y, y + d\} \tag{87}$$

y

$$G = \{y - d + 1, y + 5, y + d + 29\} \tag{88}$$

  - Sabemos que $x + y + z = 30$ y entonces:

$$\begin{aligned} y - d + y + y + d &= 30 \\ 3y &= 30 \\ y &= 10 \end{aligned} \tag{89}$$

  - Sustituyendo el valor de y obtenido en (89) en (87) y , (88)tenemos

$$A = \{10 - d, 10, 10 + d\} \tag{90}$$

y

$$G = \{11 - d, 15, 39 + d\} \tag{91}$$

– Sabemos que G es una p.g. si y sólo si

$$\frac{15}{(11-d)} = \frac{(39+d)}{15} \tag{92}$$

De (92) obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (39+d)(11-d) & = & 225 \\ 429-28d-d^2 & = & 225 \\ d^2+28d-204 & = & 0 \\ d=6 & \vee & d=-34 \end{array} \tag{93}$$

- Chequeamos la solución obtenida: Sustituyendo el valor de d obtenido en (93) en (90) y (91) obtenemos:

  Caso 1. $d=6$

$$A=\{4,10,116\} \quad \wedge \quad G=\{5,15,45\} \tag{94}$$

  Caso 2. $d=-34$

$$A=\{44,10,-24\} \quad \wedge G=\{45,15,5\} \tag{95}$$

(5) Considere las progresiones:

$$\begin{array}{rcll} G & = & \{g_1,g_2,g_3,\dots\} & \text{progresión geométrica} \\ A & = & \{3,a_2,a_3,\dots\} & \text{progresión aritmética} \end{array}$$

tal que

- $g_3=12$ y $g_7=192$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$

Determine la diferencia de la progresión A

Solución

Etapa 1 : Salida

Sea d la diferencia de la progresión aritmética $A=\{3,a_2,a_3,\dots\}$

Etapa 2 : Datos

(i) Si G es una progresión geométrica entonces

$$
\begin{aligned}
g_3 = 12 \wedge g_7 = 192 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} g_1 \cdot r^2 & = & 12 \\ g_1 \cdot r^6 & = & 192 \end{array} \\
&\Longleftrightarrow \quad r^4 = \tfrac{192}{12} \\
&\Longleftrightarrow \quad r^4 = 16 \\
&\Longleftrightarrow \quad r = 2 \quad \wedge \quad g_1 = 3 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

(ii) Aplicando (*) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i \quad &\Longleftrightarrow \quad 3(2^{11} - 1) = \tfrac{50}{2}(6 + 49d) \\
&\Longleftrightarrow \quad 6141 = 150 + 1225d \\
&\Longleftrightarrow \quad 1225d = 5991 \\
&\Longleftrightarrow \quad d = \tfrac{5991}{1225}
\end{aligned}
$$

4.5. Ejercicios Propuestos de Progresiones Geométricas.

(1) Calcule la suma de 101 términos de la progresión

$$A = \left\{ \frac{12}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \dots \right\}$$

(2) Intercale 24 medios aritméticos entre 10 y 30

(3) Intercale $n+1$ medios aritméticos entre $-x^2$ y x^2

(4) ¿ Cúantos términos de la progresión $A = \{3, -1, -5, \dots\}$, se precisan para obtener una suma igual a -15750 ?

(5) La suma de n términos de una p.a. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ es $2n + 3n^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Determine el término de la posición r.

(6) El p-ésimo término de una p.a. es q y el q-ésimo es p. Determine el m-ésimo término.

(7) La suma S_p de los p primeros términos de una p.a. es igual a q y la suma de sus q primeros términos es p. Calcule la suma de sus $p+q$ términos.

(8) La suma de los p primeros términos de una p.a. es igual a La suma de los q primeros términos con $p \neq q$. Demuestre que la suma de los $p+q$ primeros términos de la progresión es igual a cero.

(9) Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}^+$ una p.a. con difernci a d. Demuestre que
   (i) $\dfrac{a_n - a_1}{d} = n - 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$

(10) Determine el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión $G = \{-3, 3\sqrt{3}, -9 \dots\}$

(11) Determine el décimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión $G = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\}$

(12) El tercer término de una p.g. es $-\frac{2}{3}$ y el sexto, $\frac{2}{81}$. Determine el octavo término de la progresión.

(13) El cuarto término de una p.g. es $-\frac{1}{2}$ y el sexto, $-\frac{1}{8}$. Determine la suma de los 10 primeros término de la progresión.

(14) Considere la p.g. $G = \{3, 6, 12, \dots\}$. ¿ Cuál debe ser la diferencia de una p.a. cuyo primer término es 3, y la suma de los 11 primeros términos de la p.g. sea igual a la suma de los 50 primeros términos de la p.a.?

(15) Interpolar 5 medios geómetricos entre $\sqrt{2}$ y $729\sqrt{2}$

(16) Interpolar n-1 medios geómetricos entre x y xy

(17) El producto de tres números en p.g. es $\frac{125}{27}$ y la suma de los productos de esos números, dos a dos, es $\frac{65}{6}$. Determine la razón de la p.g.

(18) La suma de tres números en p.g. es $\frac{14}{3}$. Si al primero se le resta 5 y al último se le resta $\frac{35}{3}$, se obtiene una p.a. Determine ambas progresiones.

(19) Se quiere construir un muro de ladrillo en forma triangular, para ello cada fila debe contener 4 ladrillos menos que la fila inmediatamento anterior.

- Si en la primera corrida hay 585 ladrillos y en la última hay 1 ladrillo entonces determine la cantidad total de ladrillos que se necesitan para construir el muro.
- Si el total de ladrillos es 15.000, cual es el número máximo de corrridas que pueden ser construidas.

(20) Una casa vale \$ 20.000.000. Determine el valor de la casa al cabo de 8 años si esta cada año se deprecia en un 2%.

5. Teorema del Binomio

5.1. Objetivos.

(1) Que el Estudiante este en condiciones de determinar cada término en un desarrollo binomial dado.

5.2. Propiedades de los factoriales.

(1) $n! = (n-1)!n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}$, donde $0! := 1$

En efecto

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)] \cdot n \\ &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

(2) Si definimos para $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$ el número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

entonces

(a) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

En efecto

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

En particular, valen las siguientes:

(i) $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, hacer $k = 0$

(ii) $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, hacer $k = 1$

(b) $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-(k-1)}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!n+1)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k)!(n-k+1)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n+1)}{n-(k-1)} \\ &= \binom{n}{k}\cdot\frac{(n+1)}{n-(k-1)}\end{aligned}$$

(c) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k+1} \\ &= \binom{n}{k}\cdot\frac{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

(d) $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{n-k}{(k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}
\end{aligned}$$

(e) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Teorema 5.2.1. *Teorema del Binomio*

Si $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + b \neq 0$ *entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En efecto

- *p.d.q.* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$
- *Datos*

  Como $n \in \mathbb{N}$ *entonces la propiedad debe valer para los naturales y entonces estudiamos usando inducción, la validez de la fórmula:*

$$F(n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

  - *p.d.q. F(1) es verdadera*

    Por una parte tenemos que

    $(a+b)^1 = (a+b)$ *y por otra parte*

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-k}b^k = \binom{1}{0} a^{1-0}b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1}b^1 = a+b$$

  - *Hipótesis de inducción*

    Supongamos que F(n) es verdadera, es decir

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad (H)$$

  - *Tesis de inducción: p.d.q. F(n+1) es verdadera*

    En efecto

    (1) *Desarrollando F(n+1) tenemos que:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&\overset{(H)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

    (2) *Aplicando la propiedad del reloj a la segunda parcela tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} &= \sum_{k=0+1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

(3) *Reemplazando en* ($\star$) *tenemos que:*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{n}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}
$$

– *Así que F(n+1) es verdadera.*

- *Luego,*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

5.3. Ejercicios Resueltos del Teorema del Binomio.

(1) Considere el desarrollo binomial.

$$B=\left(x-\frac{1}{x^3}\right)^n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Demuestre la siguiente afirmación.

Si existe un término digamos, que contiene a x^{-4m} entonces n debe ser un múltiplo de 4.

Solución

Etapa 1 : Salida

Sea t_{s+1} el término pedido.

Etapa 2 : Datos

(i) Si t_{s+1} es el término pedido entonces

$$
\begin{aligned}
t_{s+1} &= \binom{n}{s} x^{n-s} \left(\tfrac{-1}{x^3}\right)^s \\
&= \binom{n}{s} x^{n-s} \tfrac{(-1)^s}{x^{3s}} \\
&= \binom{n}{s} x^{n-4s}(-1)^s
\end{aligned}
$$

(ii) si x^{-4m} aparece en el término t_{s+1} entonces

$$
\begin{aligned}
x^{-4m} = x^{n-4s} &\Longrightarrow -4m = n-4s \\
&\Longrightarrow 4s-4m = n \\
&\Longrightarrow 4(s-m) = n
\end{aligned}
$$

Conclusión : " n es un múltiplo de 4."

(2) Determine el término independiente de x en el desarrollo de

$$(2x+1)(1+\frac{2}{x})^{15}$$

<u>Solución</u>

Por el teorema del Binomio se tiene que:

$$(1+\tfrac{2}{x})^{15} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(\frac{2}{x})^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{-k}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
(2x+1)(1+\tfrac{2}{x})^{15} &= (2x+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{-k} \\
&= 2x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1} x^{-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{-k}
\end{aligned}
$$

Luego, el término T será independiente de x, si y sólo si:

$$[-k+1=0 \quad \wedge \quad k=0] \Longleftrightarrow [k=1 \quad \wedge \quad k=0]$$

De donde,

$$T = \binom{n}{1}2^2 + \binom{n}{0}2^0 = 4n+1$$

(3) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^2$$

Demostración

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^{2n-k}1^k=(1+1)^{2n}=2^{2n}=(2^n)^2=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^2$$

(4) Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo de $(1+\frac{x}{4})^{2n}$

Solución

Por el teorema del Binomio se tiene que:

$$(1+\tfrac{x}{4})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^{2n-k}(\frac{x}{4})^k = \sum_{k=0}^{2n}\underbrace{\binom{2n}{k}4^{-k}x^k}_{t_{k+1}}$$

Luego en el término t_{k+1} aparece x^n, si y sólo si $k=n$. Por tanto el coeficiente del término t_{n+1} es

$$C_{n+1}=\binom{2n}{n}4^{-n}$$

(5) Demuestre que si C es el coeficiente del término que contiene a x^a en el desarrollo binomial

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{3n}$$

entonces

$$C=(-1)^{\frac{9n-a}{4}}\frac{(3n)!}{\left(\frac{9n-a}{4}\right)!\left(\frac{3n+a}{4}\right)!}$$

Solución

(i) Sea t_{k+1} el término que contiene a x^a entonces

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{3n}{k}\cdot(x^3)^{3n-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k \\ &= (-1)^k\cdot\binom{3n}{k}\cdot\frac{x^{9n-3k}}{x^k} \\ &= (-1)^k\cdot\binom{3n}{k}\cdot x^{9n-4k} \end{aligned}$$

(ii) Sea,

$$C=(-1)^k\cdot\binom{3n}{k} \tag{96}$$

(iii) Ahora, x^a, aparece en el término t_{k+1} si y sólo si

$$\alpha=9n-4k$$

así que,

$$k = \frac{9n-a}{4} \tag{97}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de k, obtenido en (97) en (96) y operando tenemos:

$$\begin{aligned}
C &= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \binom{3n}{\frac{9n-a}{4}} \\
&= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \frac{(3n)!}{\left(3n - \dfrac{9n-a}{4}\right)! \cdot \left(\frac{9n-a}{4}\right)!} \\
&= (-1)^{\frac{9n-a}{4}} \cdot \frac{(3n)!}{\left(\dfrac{3n+a}{4}\right)! \cdot \left(\dfrac{9n-a}{4}\right)!}
\end{aligned}$$

(6) Si $\{a_n\}$ es una Progresión Aritmética de primer término 5 y diferencia 7 entonces calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Solución

Como $\{a_n\}$ una Progresión Aritmética de primer término 5 y diferencia es 7 entonces

$$a_n = 5 + 7(n-1) = -2 + 7n$$

Así que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-2+7k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-2)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}7k\\
&= -2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+7\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\\
&= -2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1\right)+7\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\\
&= -2\left(2^n-1\right)+7\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n\\
&= -2\left(2^n-1\right)+7\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}n \qquad \text{(prop.del reloj)}\\
&= -2\left(2^n-1\right)+7\,n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\\
&= -2\left(2^n-1\right)+7\,n\,2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(7) Aplicación

" Aceptaremos algunos resultados que serán demostrados más tarde ".

Si desarrollamos el binomio $(1+x)^n$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\\
&= \binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{s-1}x^{s-1}+\cdots+x^n\\
&= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-s+2)}{(s-1)!}x^{s-1}+\cdots+x^n
\end{aligned}
$$

El resultado que usaremos, puede ser intuitivamente descrito como sigue:

Si $|x| < 1$ y $n < 0$ entonces $(1+x)^n$ puede ser aproximado por un numero finito de términos en la ecuación descrita encima.

Ejemplo 5.3.1.

Determinemos el valor aproximado de $(1,02)^{-4}$ *con cuatro cifras significativas.*

Solución

$$
\begin{aligned}
(1,02)^{-4} &= (1+0.02)^{-4}\\
&= 1+(-4)(0.02)+\frac{(-4)(-5)}{2!}(0.02)^2+\frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}(0.02)^3+\frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{4!}(0.02)^4+\cdots\\
&= 1-0.08+0.004-0.00016+0.0000056+\cdots\\
&= 0.9238456
\end{aligned}
$$

5.4. Ejercicios Propuestos del Teorema del Binomio.

(1) Determine el séptimo término en el desarrollo binomial:

$$(2x-y)^{12}$$

(2) Determine el noveno término en el desarrollo binomial:

$$\left(2+\frac{x}{4}\right)^{15}$$

(3) Determine el término que contiene $\dfrac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial:

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2x^2}\right)^{8}$$

(4) Determine el decimocuarto término del desarrollo binomial:

$$\left(4x^2y-\frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$$

(5) si uno de los términos en el desarrollo binomial

$$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{60}$$

es de la forma $a\cdot x^{-54}$. Determine el valor de a.

(6) Determine el término independiente de x (si existe) en los binomios:

$$\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{30}$$

(7) Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

(8) Determine los cuatro primeros términos de las siguientes expresiones:

(a) $\dfrac{1}{1+x}$

(b) $\sqrt{1+x}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(d) $\dfrac{1}{1+x}$

(e) $(1+x)^{\dfrac{1}{x}}$

(9) Compute cada una de las expresiones con cuatro cifras significativas:

(a) $(1.01)^{-2}$

(b) $(1.03)^{-2}$

(c) $\sqrt[4]{(1.02)}$

(d) $\sqrt{(1.05)}$

(e) $\sqrt{33}$

(f) $\sqrt[4]{17}$

CAPITULO 3

Preliminares sobre Funciones

1. Contenidos

- Relaciones
- Funciones

2. Relaciones

2.1. Objetivos.

Que el Estudiante:

(1) Determine si un conjunto es una relación.

(2) Determine el dominio , la imagen y el gráfico de una relación.

(3) En forma natural observe que existen relaciones importantes que permiten dotar a los conjuntos con una o más estructuras que poseen propiedades interesantes, las cuales le permiten manipular y calcular de manera eficiente situaciones de una mayor complejidad.

(1) Producto Cartesiano.

Definición 2.1.1. *Sean A y B dos conjuntos no vacios entonces llamaremos "Producto Cartesiano" al conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \tag{98}$$

En particular, si $A = B$, anotamos:

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A\} \tag{99}$$

Ejemplo 2.1.2.

(a) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid 0 \leq n \leq 3\}$ entonces

$$\begin{aligned} A^2 &= \{(0,1)(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2). \\ &\quad (2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\} \end{aligned}$$

La idea es que podemos graficar estos puntos, en un sistema adecuado, como el siguiente:

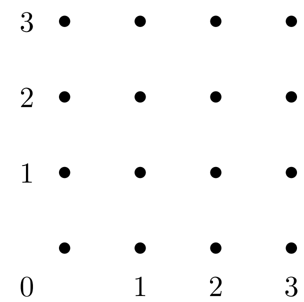


Figura 1

(b) De la Figura anterior, podemos escoger aquellos elementos que tienen la segunda Componente nula, es decir, el subconjunto de A^2.

$$
\begin{aligned}
A \times \{0\} &= \{(a,b) \in A^2 \mid b = 0\} \\
& \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}
\end{aligned}
$$

Su gráfico sería del tipo:

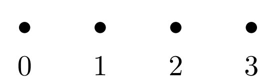


Figura 2

(c) Podemos graficar uniones de productos cartesianos, por ejemplo:

$$
A \times \{0\} \cup \{0\} \times A \cup \{(a,b) \in A^2 \mid a = b\}
$$

Su gráfico sería del tipo:

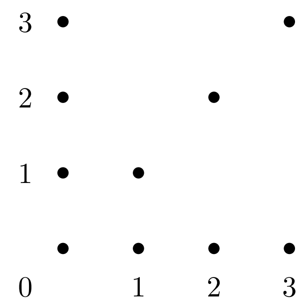


Figura 3

(d) Sea $A = \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R}^2$ el plano cartesiano sería el conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Su gráfico es del tipo:

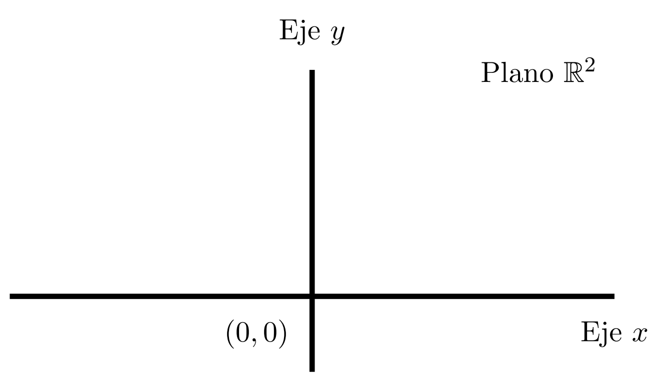


Figura 4

(e) Podemos escoger la diagonal de $\mathbb{R}^2$, es decir el conjunto:

$$\Delta(\mathbb{R}^2) = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x = y\}$$

Su gráfico es del tipo:

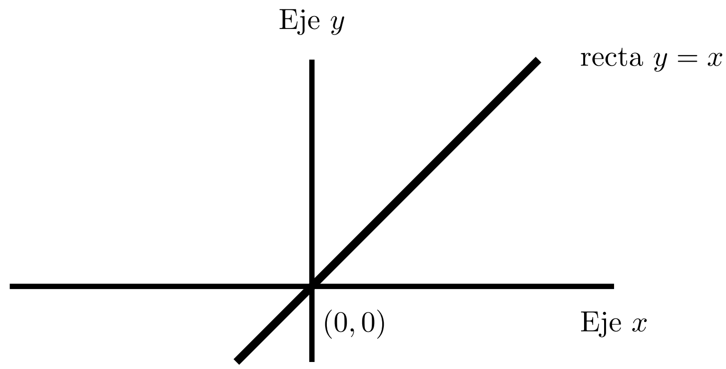


Figura 5

Entonces del producto cartesiano de dos conjuntos, podemos extraer subconjuntos que nos interesen, evidentemente que cuando se hace una selección de algunos elementos del conjunto de pares, debe haber exactamente una condición o criterio seleccionador, o mejor una relación común deben tener los elementos escogidos, esta idea motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.3.

Un conjunto R es una relación de A en B si $R \subset A \times B$

Notación:

$$R \subset A \times B \Longleftrightarrow A\, R\, B$$

Equivalentemente:

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow a\ R\ b$$

Ejemplo 2.1.4.

(1) $R = A \times B$ *es una relación pues* $A \times B \subset A \times B$

(2) $R = \emptyset$ *es una relación pues* $\emptyset$ *es subconjunto de todos los conjuntos.*

Estas relaciones son llamadas relaciones triviales.

(3) *Si definimos en* $\mathbb{R}^2$*:*

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

entonces R *es la relación de igualdad en* $\mathbb{R}^2$
Observen que cada elemento de $\mathbb{R}^2$*, esta relacionado sólo consigo mismo, el objetivo de esta relación es más bien saber cuando dos pares son diferentes.*

(4) *Define en* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ *la relación* $\sim$ *como sigue:*

$$(p, q) \sim (r, s) \Longleftrightarrow ps = qr$$

entonces podemos observar lo siguiente:

(a) $(p,q) \sim (p,q) \quad (\forall (p,q); (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$

En efecto

$pq = pq \Longrightarrow (p,q) \sim (p,q)$

(b) *Si* $(p,q) \sim (r,s)$ *entonces* $(r,s) \sim (p,q)$

En efecto

$(p,q) \sim (r,s) \Longleftrightarrow ps = qr \Longleftrightarrow sp = rq \Longrightarrow (r,s) \sim (p,q)$

(c) *Si* $(p,q) \sim (r,s) \wedge (r,s) \sim (t,u)$ *entonces* $(p,q) \sim (t,u)$

En efecto

$$\begin{array}{lcll}
(p,q) \sim (r,s) & \Longrightarrow & ps = qr & \\
(r,s) \sim (t,u) & \Longrightarrow & rt = su & \\
 & \Downarrow & & \\
qrt & = & qsu & \\
 & \Downarrow & & \\
pst & = & qsu & \\
 & \Downarrow & & \\
pt & = & qu & (s \neq 0) \\
 & \Downarrow & & \\
(p,q) & \sim & (t,u) &
\end{array}$$

(5) *Conclusiones*

Si definimos el conjunto:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{(p,q)} & = & \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mid (r,s) \sim (p,q)\} \\
 & = & \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mid ps = qr\}
\end{array}$$

entonces

- $\overline{(p,q)} \neq \emptyset \qquad (\forall (p,q); (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$

  En efecto

  Sigue directamente de $(4a)$

- $\overline{(p,q)}$ *es un conjunto infinito* $\qquad (\forall (p,q); (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$

  En efecto

$$(p,q) \sim (r,s) \sim (qr, qs) \sim (ps, qs)$$

  Así que,

$$\overline{(p,q)} = \{(ps, qs) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mid s \in \mathbb{Z}\}$$

- *Si* $(r,s) \in \overline{(p,q)}$ *entonces* $\overline{(r,s)} = \overline{(p,q)}$

En efecto

- *p.d.q.* $\overline{(r,s)} = \overline{(p,q)}$, *equivalentemente*

  p.d.q. $\overline{(r,s)} \subset \overline{(p,q)} \quad \wedge \quad \overline{(p,q)} \subset \overline{(r,s)}$

- *Datos*

  $(r,s) \in \overline{(p,q)}$ *entonces* $(r,s) \sim (p,q)$, *es decir,* $(r,s) = (pu, qu)$, *para algún* $u \in (\mathbb{Z} - \{0\})$

- *Demostración:*

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in \overline{(r,s)} & \Longleftrightarrow & (a,b) \sim (r,s) \\ (r,s) \sim (p,q) \wedge (4c) & \Longrightarrow & (a,b) \sim (p,q) \\ & \Longrightarrow & (a,b) \in \overline{(p,q)} \\ & \Longrightarrow & \overline{(r,s)} \subset \overline{(p,q)} \end{array}$$

  Analogamente:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in \overline{(p,q)} & \Longleftrightarrow & (a,b) \sim (p,q) \\ (r,s) \sim (p,q) \wedge (4b) & \Longrightarrow & (p,q) \sim (r,s) \\ & \Longrightarrow & (a,b) \in \overline{(r,s)} \\ & \Longrightarrow & \overline{(p,q)} \subset \overline{(r,s)} \end{array}$$

- *Luego,* $\overline{(p,q)} = \overline{(r,s)}$

- $\overline{(p,q)} \cap \overline{(r,s)} = \begin{cases} \emptyset \\ ó \\ \overline{(p,q)} = \overline{(r,s)} \end{cases}$

  En efecto

  Si $\overline{(p,q)} \cap \overline{(r,s)} \neq \emptyset$ *entonces*

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in \overline{(p,q)} \cap \overline{(r,s)} & \Longleftrightarrow & (a,b) \in \overline{(p,q)} \wedge (a,b) \in \overline{(r,s)} \\ & \Longrightarrow & \overline{(a,b)} = \overline{(p,q)} \wedge \overline{(a,b)} = \overline{(r,s)} \\ & \Longrightarrow & \overline{(p,q)} = \overline{(r,s)} \end{array}$$

- *Si hacemos* $(p,q) = \dfrac{p}{q}$ *entonces*

$$\overline{\left(\frac{p}{q}\right)} = \left\{ \frac{ps}{qs} \mid s \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

  Por ejemplo;

$$\begin{array}{rcl} \overline{\left(\frac{2}{3}\right)} & = & \left\{ \frac{2s}{3s} \mid s \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\} \\ & = & \left\{ \cdots, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \cdots \right\} \end{array}$$

Con algún trabajo más se demuestra que los números racionales pueden ser construidos de esta forma, la idea es que:

$$\frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})}{\sim} = \mathbb{Q} = \left\{ \overline{\left(\frac{p}{q}\right)} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

Ahora, ¿ porque el abuso de lenguaje ?

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

Por lo demostrado antes, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \cdots$$

Esta construcción es muchisimo más general, pero por el momento eso es del dominio de los Algebristas Conmutativos.

Definición 2.1.5.

Sea R una relación en el conjunto no vacio A, es decir $R \subset A^2$ entonces

(1) *R se llama una relación refleja o reflexiva si*

$$a \; R \; a \quad (\forall a; a \in \mathbb{A}) \tag{100}$$

(2) *R se llama una relación simétrica si*

$$a \; R \; b \Longrightarrow b \; R \; a \tag{101}$$

(3) *R se llama una relación transitiva si*

$$a \; R \; b \wedge b \; R \; c \Longrightarrow a \; R \; c \tag{102}$$

Ejemplo 2.1.6.

(1) *Sea $A = \mathbb{R}$ entonces*

$$\Delta(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x = y\}$$

Es una relación refleja y simétricaa

(2) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x = y\} \cup \{(2, 3)\}$, *Es refleja y no simétrica*

(3) $S = \{(x, y)\mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, *es simétrica, no refleja y no transitiva, pues:*

- $1^2 + 1^2 = 2 \Longrightarrow (1, 1) \notin S$
- $(1, 0) \in S \wedge (0, 1) \in S$, *pero* $(1, 1) \notin S$

(4) *Define en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ la relación $\sim$ como sigue:*

$$(p, q) \sim (r, s) \Longleftrightarrow ps = qr$$

entonces la relación $\sim$ es transitiva

Definición 2.1.7.

Sea R una relación en el conjunto no vacío A, es decir $R \subset A^2$ entonces R se llama una relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo 2.1.8.

Define en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ *la relación* $\sim$ *como sigue:*

$$(p, q) \sim (r, s) \Longleftrightarrow ps = qr$$

entonces la relación $\sim$ *es de equivalencia*

Teorema 2.1.9.

Sobre las relaciones de equivalencia.

Sea R *una relación de equivalencia en el conjunto no vacio* A *entonces*

(1) $\overline{a} = \{b \in A \mid \ a\ R\ b\} \neq \emptyset \quad (\forall a; a \in A)$

(2) $b \in \overline{a} \Longrightarrow \overline{a} = \overline{b}$

(3) $\overline{a} \cap \overline{b} = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ó} \\ \overline{a} = \overline{b} \end{cases}$

(4) $\frac{A \times A}{R} := \{\overline{a} \mid a \in A\} = \dot{\bigcup\limits_{a \in A}} \overline{a}$

La demostración teórica del teorema anterior es similar a la dada en el caso de los racionales, pero podemos analizar graficamente este teorema, analizando graficamente la relación que construye los racionales:

Definición 2.1.10.

Si $R \subset A^2$ *es de equivalencia entonces el conjunto* $\overline{a}$ *se llama clase de equivalencia del elemento* a*.*

Ejemplo 2.1.11.

Si $R = \sim$ *entonces:*

$$\overline{0} = \overline{(0, 1)} = \{\cdots, (0, -1), (0, 1), (0, 2), \cdots\}$$

Consideremos por ejemplo el gráfico de $\overline{(0, 1)}$ y $\overline{(1, 1)}$:

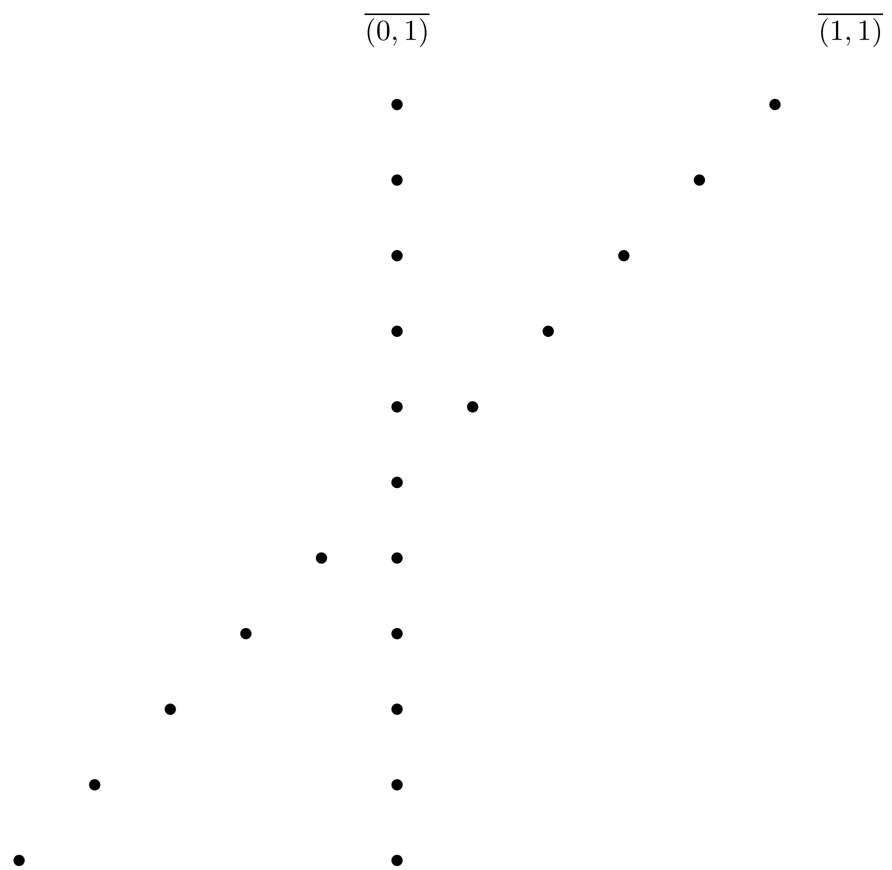


Figura 6

Definición 2.1.12.

Sea R una relación en el conjunto no vacio A, es decir $R \subset A^2$ entonces R se llama una relación antisimétrica si:

$$a\ R\ b \quad \wedge \quad b\ R\ a \Longrightarrow a = b$$

Ejemplo 2.1.13.

(1) *En la clase de los conjuntos define la relación de subconjunto, es decir:*

$$A\ R\ B \Longleftrightarrow A \subset B$$

entonces "$\subset$" es una relación antisimétrica.

(2) *La relación "$\leq$" definida en $\mathbb{R}$ es antisimétrica. (ver [**2**])*

Definición 2.1.14.

Sea R una relación en el conjunto no vacio A, es decir $R \subset A^2$ entonces R se llama una relación de orden si:

(1) *R es refleja*

(2) *R es antisimétrica*

(3) *R es transitiva*

Ejemplo 2.1.15.

(1) *La relación de $\subset$ en la clase de conjuntos es una relación de orden.*

(2) *La relación "$\leq$" definida en $\mathbb{R}$ es de orden.*

2.2. Elementos importantes de una relación.

Sea R una relación del conjunto no vacio A en el conjunto no vacio B, entonces

(1) Llamaremos dominio de R al conjunto:

$$dom(R) = \{a \in A \mid (\exists b; b \in B) : a\ R\ b\}$$

Es decir en el dominio coleccionamos las primeras componentes de los pares ordenados que en ella aparecen.

Ejemplo 2.2.1.

Sea $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Z}$ entonces define:

$$R = \{(m, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ m + z^2 = 20\}$$

entonces

$$dom(R) = \{4, 11, 16, 19, 20\} \subset \mathbb{N}$$

(2) Llamaremos Imagen o recorrido de R al conjunto:

$$Img(R) = \{b \in B \mid (\exists a; a \in A) : a\ R\ b\}$$

Es decir en la Imagen coleccionamos las segundas componentes de los pares ordenados que en ella aparecen.

Ejemplo 2.2.2.

En el ejemplo anterior:

$$Img(R) = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\} \subset \mathbb{Z}$$

(3) Llamaremos Imagen de $a \in dom(R)$ al conjunto

(103) $$R(a) = \{b \in B \mid a\ R\ b\}$$

Ejemplo 2.2.3.

En el ejemplo anterior tenemos:

(a) $R(4) = \{4, -4\}$

(b) $R(11) = \{3, -3\}$

(c) $R(16) = \{2, -2\}$

(d) $R(19) = \{1, -1\}$

(e) $R(20) = \{0\}$

(f) $R(3) = \emptyset$

(4) Llamaremos Preimagen de $b \in Img(R)$ al conjunto

$$R^{-1}(b) = \{a \in A \mid a\ R\ b\}$$

Ejemplo 2.2.4.

en el ejeemplo anterior tenemos:

(a) $R^{-1}(4) = \{4\}$

(b) $R^{-1}(-4) = \{4\}$

(c) $R^{-1}(3) = \{11\}$

(d) $R^{-1}(-3) = \{11\}$

(e) $R^{-1}(2) = \{16\}$

(f) $R^{-1}(-2) = \{16\}$

(g) $R^{-1}(1) = \{19\}$

(h) $R^{-1}(-1) = \{19\}$

(i) $R^{-1}(0) = \{20\}$

(j) $R^{-1}(5) = \emptyset$

2.3. Construcción de Relaciones.

(1) Sea A un conjunto no vacio entonces llamaremos relación identidad de A, al conjunto:

$$1_A = \{(a, a) \in A \times A\}$$

La identidad de A se acostumbra a llamar la diagonal de A

(2) Sea R una relación del conjunto no vacio A en el conjunto no vacio B, entonces llamamos relación inversa de R a la relación:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid \ (a, b) \in A \times B\}$$

(3) Sean $R \subset A \times B$ y $G \subset B \times C$, donde A, B y C son conjuntos no vacios entonces llamaremos función composición (o compuesta) de las relaciones R y G al conjunto:

$$(G \circ R) = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b; b \in B) : a \ R \ b \wedge b \ G \ c\}$$

Ejemplo 2.3.1.

Consideremos en $A = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $B = \{a, b, c\}$ *y* $C = \{p, q, r, s\}$*, las relaciones:*

$$\begin{aligned} R &= \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)\} \subset A \times B \\ G &= \{(a, p), (c, q), (a, r), (c, s)\} \subset B \times C \end{aligned}$$

entonces tenemos que:

(a) $(G \circ R) = \{(1, p), (1, r), (2, q), (2, s), (4, q), (4, s)\} \subset A \times C$

Observen que $dom(G \circ R) = \{1, 2, 4\} \subset dom(A) = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $(R^{-1} \circ R) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = 1_A$

(c) $(R \circ R^{-1}) = \{(a, a), (c, c), (b, b)\} = 1_B$

(d) $(G^{-1} \circ G) = \{(a, a), (c, c), \} \subset 1_B$

(e) $(G \circ G^{-1}) = \{(p, p), (q, q), (r, r), (s, s), \} = 1_C$

2.4. Generalizaciones.

(1) Dado un conjunto A no vacio podemos extender el concepto de producto cartesiano naturalmente a "n-dimensiones", es decir:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, (1 \leq i \leq n)\}$$

Ejemplo 2.4.1.

El espacio tridimensional lo escribimos como:

$$R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Graficamente lo podemos representar como:

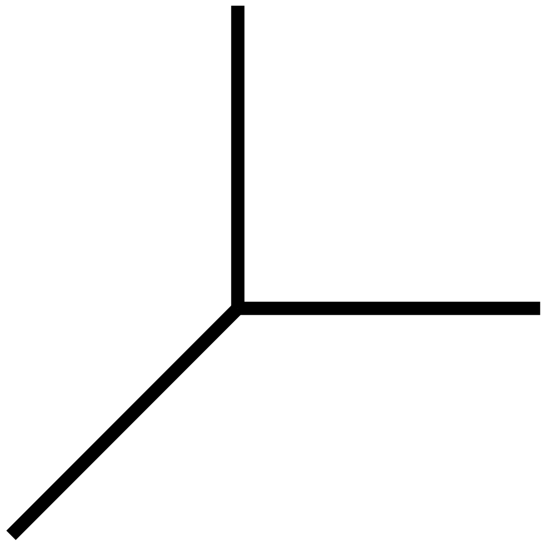


Figura 7

(2) Consideremos en A^n los elementos $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; $\quad y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ entonces definimos

$$x = y \Longleftrightarrow a_i = b_i \quad (\forall i; i = 1, 2, \dots, n)$$

Observación 2.4.2. *Sean A_i con $i = 1, 2, \dots, s$ una "familia finita" de conjuntos no vacios entonces*

$$R \subset \prod_{i=1}^{s} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s$$

la llamamos una relación "s-dimensional".

2.5. Ejercicios Resueltos.

(1) Determine el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y, x - y) = (2, 0)\}$$

Solución

"**Recuerde que para pertenecer a un conjunto, hay que ser igual a un miembro del conjunto**"

Así que, manos a la obra

$$\begin{aligned}
(x,y)\in C &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad\wedge\quad (x+y,x-y)=(2,0)\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad\wedge\quad \left.\begin{array}{c} x+y=2\\ x-y=0\end{array}\right|\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad\wedge\quad x=y=1
\end{aligned}$$

Luego,

$$C=\{(1,1)\}$$

(2) Si A, B y C son conjuntos entonces demuestre que:

(104)
$$A\subset B\Longrightarrow A\times C\subset B\times C$$

Solución

"Recordamos que la idea de "$\subset$", es en este caso. Si A es parte de B entonces A cruz C es parte de B cruz C"

Ahora, matematizando tenemos que:

- Datos (hipótesis),

$$A\subset B\Longleftrightarrow x\in A\Longrightarrow x\in B$$

- p.d.q.

$$(a,c)\in A\times C\Longrightarrow (a,c)\in B\times C$$

Manos a la obra:

$$\begin{aligned}
(a,c)\in A\times C &\iff a\in A\wedge c\in C\\
&\Longrightarrow \underbrace{a\in B}_{\text{hipótesis}}\wedge c\in C\\
&\Longrightarrow (a,c)\in B\times C
\end{aligned}$$

Lo que demuestra (104).

(3) Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo.Define en $\mathbb{Z}$ la relación $\cong$, como sigue:

(105)
$$m\cong t \quad \text{mód } (n)\Longleftrightarrow (\exists r; r\in\mathbb{Z}):(m-t)=rn$$

Demuestre que $\cong$ es una relación de equivalencia.

Notación:

$m\cong t \quad$ mód(n), se lee m congruente a t módulo n.

Solución

Entendiendo el problema:

- ¿ Qué hace esta relación ?.

  Por ejemplo, para fijar ideas tomemos $n=3$,

  - $18\cong 30$, pues $(18-30)=-12=3\cdot(-4)$. Observe que $30\cong 18$, pues $(30-18)=12=3\cdot 4$
  - $17\cong 11$, pues $(17-11)=6=3\cdot 2$
  - $13\ncong 5$, pues $(13-5)=8\neq 3\cdot$ por cualquier entero

  En la práctica, observe lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} 18 & : & 3 & = & 6 \\ 18 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{0}_{resto} & & & & \end{array} \wedge \begin{array}{cccc} 30 & : & 3 & = & 10 \\ 30 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{0}_{resto} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 17 & : & 3 & = & 5 \\ 15 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{2}_{resto} & & & & \end{array} \wedge \begin{array}{cccc} 11 & : & 3 & = & 3 \\ 09 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{2}_{resto} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 13 & : & 3 & = & 4 \\ 12 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{1}_{resto} & & & & \end{array} \wedge \begin{array}{cccc} 5 & : & 3 & = & 1 \\ 09 & & & & \\ --- & & & & \\ \underbrace{2}_{resto} & & & & \end{array}$$

Así, podemos aventurar una primera conclusión:

Dos enteros están relacionados para $n = 3$, si al dividir cada uno por 3, poseen el mismo resto y este será 0 ó 1 ó 2. Caso contrario no están relacionados

- En general, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} m \cong t \mod n & \Longleftrightarrow & (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : (m - t) = rn \\ & \Longleftrightarrow & (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : m = rn + t \end{array}$$

Es claro entonces que t es congruente a muchos enteros m, módulo n. ¿Cúantos y Quienes ?.
Para determinarlos definamos el siguiente conjunto.

$$\overline{t}(n) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \cong t \mod (n)\}$$

$\overline{t}(n)$ o $\overline{t}$, si no hay confusión, lo llamaremos la clase de t, módulo n.

Podemos explicitar más este conjunto, haciendo lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \overline{t}(n) & = & \{m \in \mathbb{Z} \mid m \cong t \mod (n)\} \\ & = & \{m \in \mathbb{Z} \mid (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : m = rn + t\} \\ & = & \{rn + t \mid r \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Para $n = 3$, por ejemplo:

Para $t = 0$

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 3r + 0\} \\ & = & \{\dots, -9, -6 - 3, 0, 3, 6, 9 \dots\} \end{array}$$

Para $t = 1$

$$\begin{array}{rcl} \overline{1} & = & \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 3r + 1\} \\ & = & \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} \end{array}$$

Para $t = 2$

$$\begin{array}{lll} \overline{2} & = & \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 3r + 2\} \\ 6 = & \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} & \end{array}$$

Ahora, en primer lugar; cualquier otro entero t, al dividirse por 3, los únicos restos posibles son de acuerdo a la forma de dividir, $0, 1$ ó 2.

En segundo lugar;

$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}$

$\overline{0} \cap \overline{1} = \emptyset$

$\overline{0} \cap \overline{2} = \emptyset$

$\overline{1} \cap \overline{2} = \emptyset$

En general, al dividir cualquier entero por un entero n, fijo los únicos restos posibles son; $0, 1, 2, \dots, n-1$ y

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{n-1} [i]$$

$i \neq j \Longrightarrow \overline{i} \cap \overline{j} = \emptyset$

Mostremos finalmente que las congruencias módulo n son una relación de equivalencia.

(i) Propiedad refleja : $(m \cong m \mod n \quad \forall m; m \in \mathbb{Z})$

$m - m = 0 = n \cdot 0 \quad (\forall m; m \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow m \cong m \mod n$

Luego, la relación es refleja.

(ii) Propiedad Simétrica : $(m \cong t \mod n \Longrightarrow t \cong m \mod n)$

Sabemos que:

(106) $$m \cong t \mod n \Longleftrightarrow (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : (m - t) = rn$$

entonces

$$\begin{aligned} (t - m) &= -(m - t) \\ &\underbrace{=}_{\text{aplica (106)}} -rn \\ &= (-r)n \end{aligned}$$

como $r \in \mathbb{Z}$ entonces $(-r) \in \mathbb{Z}$ as°'ı que $t \cong m \mod n$

Luego, la relación es simétrica.

(iii) Propiedad Transitiva : $(m \cong t \mod n \wedge t \cong s \mod n \Longrightarrow m \cong s \mod n)$

Sabemos que (¿ Por qué ?):

(107) $$m \cong t \mod n \Longleftrightarrow (\exists r_1; r_1 \in \mathbb{Z}) : (m - t) = r_1 n$$

(108) $$t \cong s \mod n \Longleftrightarrow (\exists r_2; r_2 \in \mathbb{Z}) : (t - s) = r_2 n$$

Luego,

$$\begin{aligned}(m-s) &= (m-s-t+t) \quad \text{(trato de hacer operativos(107) y (108))}\\ &= (m-t)+(t-s)\\ &= \underbrace{r_1 n}_{(107)} + \underbrace{r_2 n}_{(108)}\\ &= (r_1+r_2)n\end{aligned}$$

Como $r_1 \in \mathbb{Z}$ y $r_2 \in \mathbb{Z}$ entonces $(r_1+r_2) \in \mathbb{Z}$ y $m \cong s \mod n$.

Luego, la relación es transitiva.

Así que, $\cong \mod n$ es una relación de equivalencia.

2.6. Ejercicios Propuestos de Relaciones.

(1) Determine el valor de verdad (esto es (e.e.) verdadero o falso), de las siguien tes sentencias:
 (i) $(-3, 33) \in \mathbb{N}^2$
 (ii) $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{Q}^2$
 (iii) $(1, 2, \pi, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$
 (iv) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$
 (v) $\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$

(2) Suponga que los conjuntos no vacíos X,Y, Z, satisfacen las propiedeades: $X \subset Z$ e $Y \subset Z$. Demuestre que
 (i) $X \subset Y \Longrightarrow X \times Y \subset Y \times Y$
 (ii) $X \subset Y \Longrightarrow X \times X \subset X \times Y$

(3) Define en $\mathbb{Q}^+$, los racionales positivos, la relación:

$$q_1 R q_2 \longleftrightarrow (\exists p; p \in \mathbb{Z}) : q_1 \cdot (q_2)^{-1} = 3^p \tag{109}$$

 (i) Demuestre que (109) define una relación de equivalencia
 (ii) Determine $\overline{\left(\dfrac{4}{5}\right)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{a}{b} R \frac{4}{5}\right\}$

(4) Suponga que R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia. Demuestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia.

(5) Define en $\mathbb{Z}$ la relación

$$mRn \Longleftrightarrow (\exists u; u \in \mathbb{N} \cup \{0\}) : (n-m) = u \tag{110}$$

 Demuestre que (110) es una relación de orden.

(6) Sean R_1 y R_2 dos relaciones de orden, definidas en los conjuntos A y B respectivamente. Define en $A \times B$ la relación:

$$(a, b)(R_1 \times R_2)(a', b') \Longleftrightarrow aR_1a' \wedge bR_2b' \tag{111}$$

 Demuestre que (111) es una relación de orden.

3. Funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Diremos que f es una función del conjunto A en el conjunto B si:

(1) $f \subset A \times B$, es decir f es una relación de A en B.

(2) $dom(f) = A$

(3) $f(a) = \{b \in B \mid a\ f\ b\}$ posee un único elemento $(\forall a; a \in A)$ (ver (103))

Luego, una función es una relación especial pues;

- Su dominio coincide con el conjunto de salida de la relación.
- Todo elemento del dominio posee una única imagen.

Notaciones posibles:

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \longmapsto & B \\ & & a & \longmapsto & f(a) = b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \stackrel{f}{\longmapsto} & B \\ a & \longmapsto & b \end{array} \qquad a \in A \longmapsto f(a) = b \in B$$

Ejemplo 3.0.1.

(1) $a \in \mathbb{N} \longmapsto f(a) = 2 \cdot a + 3 \in \mathbb{Z}$
En este caso tenemos que por ejemplo:

- $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
- *etc.*

(2) $x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \dfrac{x+1}{3}$
Aquí tenemos:

- $f(1) = \dfrac{2}{3}$
- $f(4) = \dfrac{5}{3}$
- *etc.*

(3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto f(A) = a_{11} + a_{22} \in \mathbb{R}$
En este caso tenemos:

- $f\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 9$
- $f\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} = 0$
- *etc.*

(4) $x \in (\mathbb{R} - \{2\}) \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
Ahora observamos que

- $f(0) = -\dfrac{1}{2}$
- $f(3) = 1$
- $f(2) = \nexists$

Los elementos que pueden ser procesados para obtener información, corresponde a lo que llamamos en la sección anterior dom(f).

Definición 3.0.2.

Sea f una función entonces

(1) *Llamamos dominio de f al conjunto*
$$dom(f) = \{a \in A \mid (\exists b; b \in B) : f(a) = b\}$$
En particular, si $A = B = \mathbb{R}$ entonces
$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$
(2) *Llamamos imagen o recorrido de f al conjunto*
$$Img(f) = \{b \in B \mid (\exists a; a \in dom(f) : f(a) = b\}$$
En particular, si $A = B = \mathbb{R}$ entonces
$$Img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}$$
(3) *Llamaremos gráfico de f al conjunto*
$$graf(f) = \{(a, b) \mid b = f(a)\}$$

Ejemplo 3.0.3.

Considere la función real $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(1) *Determinemos el dominio de f.*
$$\begin{array}{rcl} x \in dom(f) & \Longleftrightarrow & x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad f(x) \in \mathbb{R} \\ \\ & \Longleftrightarrow & x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$
Así
$$dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$
(2) *Determinemos la imagen o recorrido de f.*
$$\begin{array}{rcl} y \in img(f) & \Longleftrightarrow & y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & y = \frac{1}{x} \text{ tal que } x \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R} - \{0\} \\ & \Longleftrightarrow & y \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$
Así
$$Img(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

(3) *Determinemos el gráfico de* f.

$$P \in graf(f) \Longleftrightarrow P = (x, f(x)) \quad \wedge \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

Si notamos $x >> 0$ *cuando* x *es grande, grande y* $x << 0$ *cuando* x *es pequeño, pequeño entonces*

$$x >> 0 \Longrightarrow f(x) << 0 \tag{112}$$

$$x << 0 \Longrightarrow f(x) >> 0 \tag{113}$$

Luego, de (112) *y* (113), *sigue que el gráfico de* f *es:*

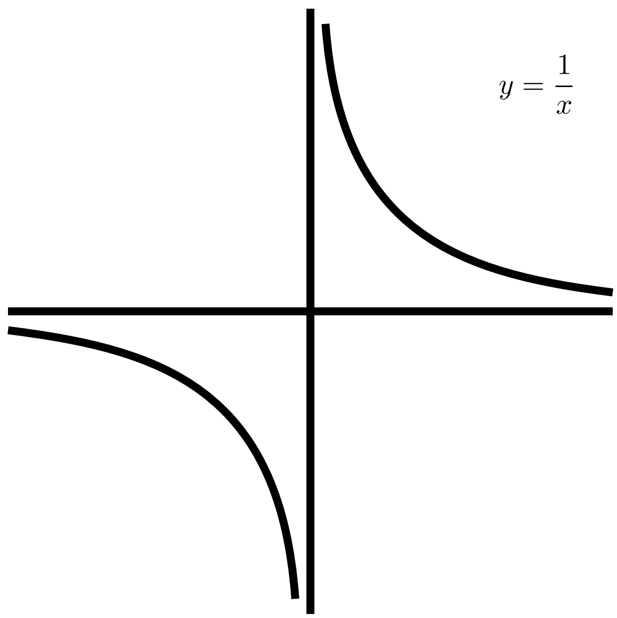


Figura 8

Ejemplo 3.0.4.

Definamos $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = (x + y, 3x + 3y)$ *entonces*

(1) *Determinemos* $dom(f)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\Longrightarrow (x + y) \in \mathbb{R} \wedge (x - y) \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow (x + y, 3x + 3y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$dom(f) = \mathbb{R}^2$$

Determinemos $Img(f)$

$$
\begin{aligned}
(u,v)\in Img(f) &\iff (\exists(x,y);(x,y)\in\mathbb{R}^2): f(x,y)=(u,v)\\
&\iff (x+y,3x+3y)=(u,v)\\
&\iff \left|\begin{array}{rcrcl} x &+& y &=& u\\ 3x &+& 3y &=& v\end{array}\right.\\
&\iff \left|\begin{array}{rcrcl} x &+& y &=& u\\ x &+& y &=& \dfrac{v}{3}\end{array}\right.\\
&\iff u=\tfrac{v}{3} \quad\vee\quad 3u=v
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
\begin{aligned}
Img(f) &= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid\ v=3u\}\\
&= \{(u,3u)|\ u\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Luego, esta función transforma el plano en una recta, más precisamente tenemos:

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y)=(x+y,3x+3y)=(u,3u)\in\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid\ v=3u\}$$

Graficamente la situación puede ser vista como sigue:

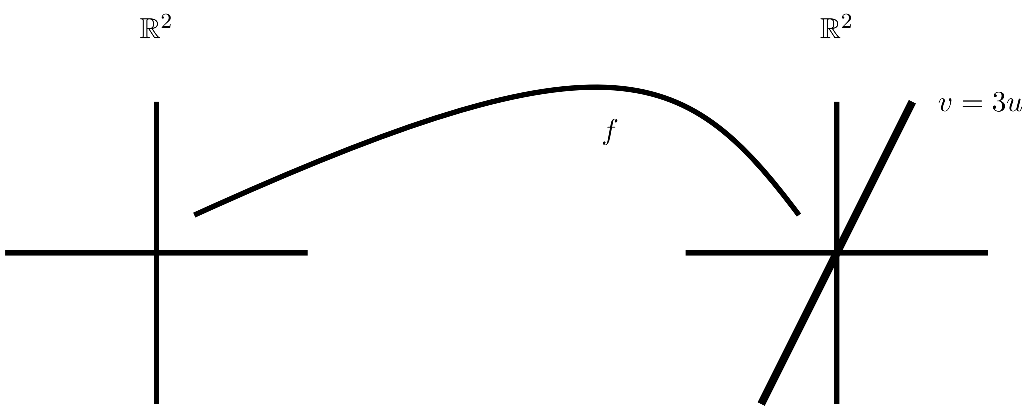


Figura 9

3.1. Clasificación de funciones.

Observación 3.1.1.

Sabemos que toda relación R*, digamos* $R\subset A\times B$ *tiene una relación inversa* $R^{-1}\subset B\times A$ *tal que* $R^{-1}\circ R\subset\Delta(A)$ *y* $R\circ R^{-1}\subset\Delta(B)$*. Sin embargo para una función podemos tener problemas, estudiemos un ejemplo para fijar ideas.*

Ejemplo 3.1.2.

(1) *Sea* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = x^2$ *entonces*

- $dom(f) = \mathbb{R}$, *pues* $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}$
- $Img(f) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

Si definimos $f^{-1} : Img(f) \longmapsto \mathbb{R}$ *entonces por ejemplo:*

- $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$, *¿ Cuál de los dos ?*
- $f^{-1}(9) = \{3, -3\}$
- *etc.*

entonces f^{-1} *es una relación que no es función pues, existe al menos, (en realidad muchos) un elemento que posee más de una imagen.*
Así que una condición es que $f^{-1}(x) = \{\text{tenga un único elemento}\}$.

(2) *Sea* $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{R}$, *tal que* $f(z) = 2z$ *entonces*

- $f^{-1}(4) = \{2\}$
- $f^{-1}(3) = \nexists$
- $f^{-1}(0.5) = \nexists$
- *etc.*

Luego, otra condición necesaria es que $dom(f^{-1}) = Img(f)$

Definición 3.1.3.

Sea $f : A \longmapsto B$ *una función entonces diremos que* f *es inyectiva si*

$$x_1 \neq x_2 \text{ en el } dom(f) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Definición 3.1.4.

Sea $f : A \longmapsto B$ *una función entonces diremos que* f *es sobreyectiva si*

$$Img(f) = B$$

Definición 3.1.5.

Sea $f : A \longmapsto B$ *una función entonces diremos que* f *es biyectiva si* f *es inyectiva y* f *es sobreyectiva*

Ejemplo 3.1.6.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - y)$ entonces

(1) Verifiquemos si f es inyectiva

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) &\iff (x_1+y_1,x_1-y_1)=(x_2+y_2,x_2-y_2)\\
&\iff \left|\begin{array}{rcl} x_1+y_1 &=& x_2+y_2\\ x_1-y_1 &=& x_2-y_2 \end{array}\right.\\
&\iff 2x_1=2x_2\wedge 2y_1=2y_2\\
&\iff x_1=x_2\wedge y_1=y_2\\
&\iff (x_1,y_1)=(x_2,y_2)
\end{aligned}$$

Luego, f es inyectiva

(2) Estudiemos la sobreyectividad de f.

El algoritmo es el siguiente:

- p.d.q $Img(f)=\mathbb{R}^2$, es decir p.d.q. $Img(f)\subset\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2\subset Img(f)$
- Como $f:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}^2$ entonces naturalmente $Img(f)\subset\mathbb{R}^2$, así que sólo debemos demostrar que $\mathbb{R}^2\subset Img(f)$
- Sea $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ entonces p.d.q existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(u,v)$, es decir f será sobreyectiva si y sólo si tiene solución en $\mathbb{R}^2$la ecuación $f(x,y)=(u,v)$
  Luego,

$$\begin{aligned}
f(x,y)=(u,v) &\iff (x+y,x-y)=(u,v)\\
&\iff \left|\begin{array}{rcll} x+y &=& u & (1)\\ x-y &=& v & (2) \end{array}\right.\\
&\iff \underbrace{x=\frac{u+v}{2}}_{(1)+(2)} \quad\wedge\quad \underbrace{y=\frac{u-v}{2}}_{(1)-(2)}
\end{aligned}$$

Así que,

$$f(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})=(u,v)\qquad(\forall(u,v);(u,v)\in\mathbb{R}^2)$$

(3) Entonces f es sobreyectiva

Definición 3.1.7.

Sean $f:A\longmapsto B$ y $g:B\longmapsto C$, dos funciones entonces adaptamos la definición de composición de relaciones para funciones poniendo,

$$\begin{array}{rcccc}(g\circ f) & : & A & \longmapsto & C\\ & & a & \longmapsto & (g\circ f)(a)\end{array}$$

donde.

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))\qquad(\forall a;a\in A)$$

Teorema 3.1.8.

$(g \circ f)$ es una función de A en C.

Demostración: Es un buen ejercicio.

Ejemplo 3.1.9. *Definamos la "<u>relación inversa</u>", en* (3.1.6)

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,v) & \longmapsto & f^{-1}(u,v) \end{array}$$

Tal que

$$f^{-1}(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$$

entonces por una parte

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x,y) &= f^{-1}(f(x,y)) \\ &= f^{-1}(x+y, x-y) \\ &= (\tfrac{x+y+x-y}{2}, \tfrac{x+y-(x-y)}{2}) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Luego,

$$(f^{-1} \circ f) = 1_{\mathbb{R}^2}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x,y) &= f(f^{-1}(x,y)) \\ &= f(\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x-y}{2}) \\ &= (\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}, \tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Así que tambien en este caso:

$$(f \circ f^{-1}) = 1_{\mathbb{R}^2}$$

Definición 3.1.10.

Sea $f : A \longmapsto B$ una función. Diremos que f, es una función invertible o que tiene inversa si existe una función $g : B \longmapsto A$ tal que

$$\begin{aligned} f \circ g &= 1_B \\ g \circ f &= 1_A \end{aligned}$$

A una tal función la llamamos la inversa de f y la notamos f^{-1}, es decir $g = f^{-1}$

Ejemplo 3.1.11. *Si f es como en* (3.1.6) *entonces f es invertible y*

$$f^{-1}(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$$

3.2. Ejercicios Resueltos de Funciones.

(1) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ entonces

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

- Para la imagen de f, tenemos que:

$$\begin{aligned} y \in img(f) &\iff y = f(x) \text{ para algún x} \in \mathbb{R} \\ &\iff y = \frac{1}{x-2} \text{ tal que } x \neq 2 \\ &\iff x = \frac{1+2y}{y} \in \mathbb{R} - \{2\} \\ &\iff y \neq 0 \\ &\iff y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

- Observe con atención lo siguiente:

(114) $$x - 2 >> 0 \implies x >> 2 \quad \wedge \quad f(x) << 0$$

(115) $$x - 2 << 0 \implies x << 2 \quad \wedge \quad f(x) >> 0$$

Luego, de (114) y (115), sigue que el gráfico de f es:

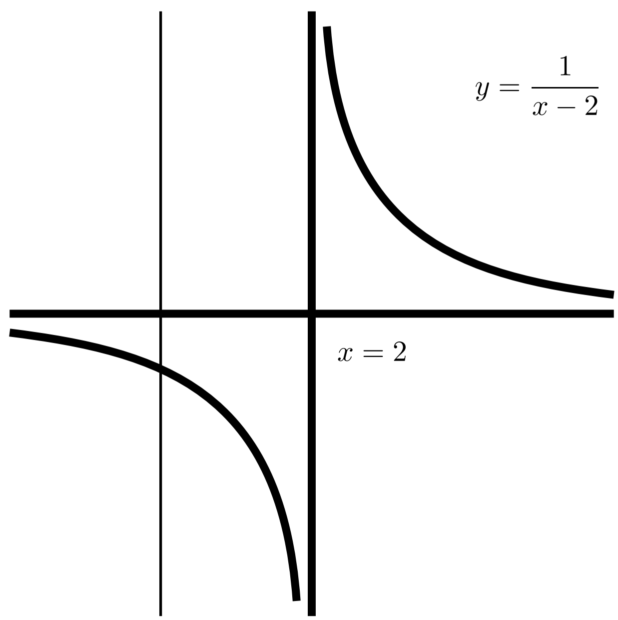


Figura 10

(2) En general tenemos las siguientes posibilidades " horizontales ":

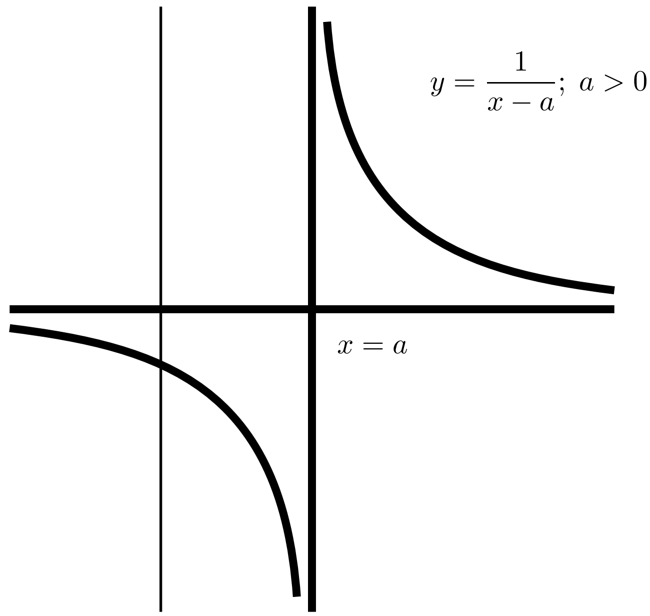


Figura 11

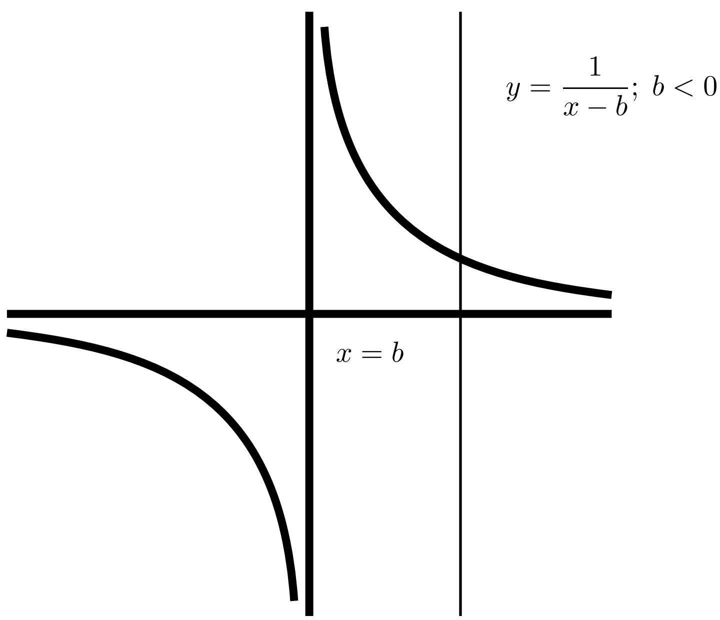


Figura 12

(3) Para los casos " verticales ", tenemos

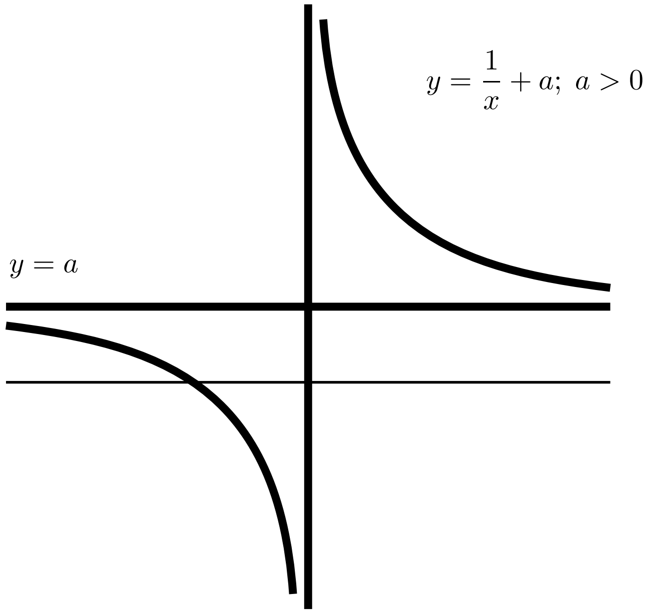


Figura 13

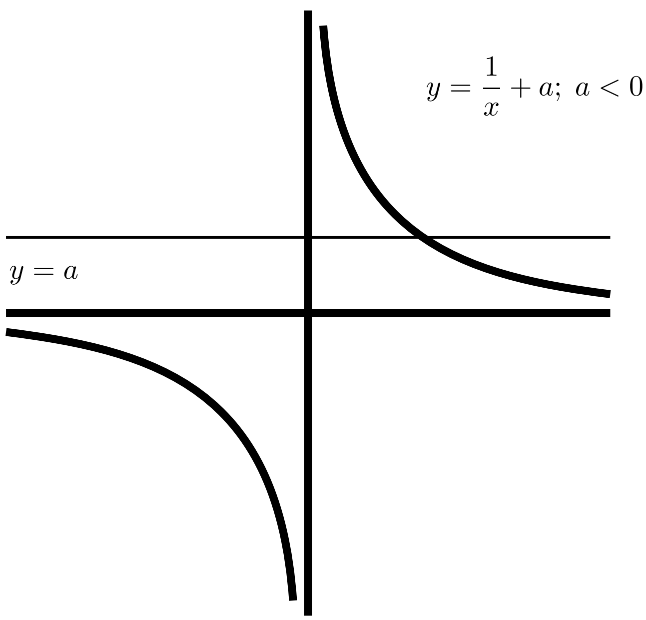


Figura 14

(4) Finalmente estudiemos la relación,

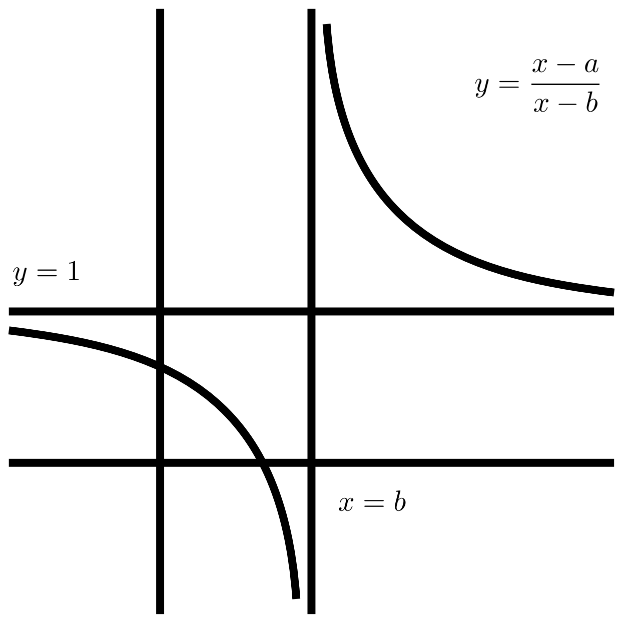
$$f(x) = \frac{x-a}{x-b} \quad (a > 0; b > 0; a < b) \tag{116}$$

Tratemos de aplicar lo anterior a la relación (116):

– Dividimos; esto es:

$$\begin{array}{rlcccc} & x-a & : & x-b & = & 1 \\ (-) & x-b & & & & \\ \hline & b-a & & & & \end{array} \Longrightarrow \frac{x-a}{x-b} = 1 + \frac{b-a}{x-b}$$

– Aplicando lo estudiado antes a la relación f, su gráfico es del tipo:



- Leyendo el gráfico hacemos a f una función, poniendo:
  $dom(f) = \mathbb{R} - \{b\}$
  $Img(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
  Luego,

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} - \{b\} & \longmapsto & \mathbb{R} - \{1\} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-a}{x-b} \end{array}$$

(5) Define $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$ entonces

(a) Es claro de la definición que $dom(T) = \mathbb{R}^3$

(b) Para la imagen de T, tenemos:

$$\begin{aligned} u\in Img(T) &\iff u\in\mathbb{R}^2\wedge T(v)=u \quad \text{para algún } v\in\mathbb{R}^3\\ &\iff u=(u_1,u_2)\wedge T(v_1,v_2,v_3)=(u_1,u_2)\\ &\iff u=(u_1,u_2)\wedge(v_1+v_2+v_3,v_1-v_2-v_3)=(u_1,u_2)\\ &\iff u=(u_1,u_2)\quad\wedge\quad \left.\begin{array}{rcl} v_1+v_2+v_3&=&u_1\\ v_1-v_2-v_3&=&u_2\end{array}\right| \\ &\iff u=(u_1,u_2)\ \wedge\ v_1=\tfrac{u_1+u_2}{2}\wedge v_2+v_3=\tfrac{u_1-u_2}{2}\\ &\iff u=(u_1,u_2)\quad\wedge\quad v=(\tfrac{u_1+u_2}{2},v_2,\tfrac{u_1-u_2}{2}-v_2)\end{aligned}$$

Luego,

(117) $$Img(T)=\mathbb{R}^2$$

Podemos comprobar lo anterior calculando directamente; es decir:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\frac{u_1+u_2}{2},v_2,\frac{u_1-u_2}{2}-v_2)\\ &= (\frac{u_1+u_2}{2}+v_2+\frac{u_1-u_2}{2}-v_2,\frac{u_1+u_2}{2}-v_2-\frac{u_1-u_2}{2}+v_2)\\ &= (\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2},\frac{u_1+u_2}{2}-\frac{u_1-u_2}{2})\\ &= (u_1,u_2)\end{aligned}$$

Así la fórmula

(118) $$T(\frac{u_1+u_2}{2},v_2,\frac{u_1-u_2}{2}-v_2)=(u_1,u_2)$$

dice que T es sobreyectiva

(c) La fórmula (118) nos permite verificar que T no es inyectiva, pues por ejemplo:

$$(1,1)=T(1,3,-3)\quad\wedge\quad(1,1)=T(1,5,-5)$$

(d) Un problema interesante es ¿ cómo transformar T en inyectiva ? o ¿ qué tan no inyectiva es T?
La idea es caracterizar de alguna forma la propiedad $T(v)=T(q)$ y $v\neq q$, es decir los conjuntos importantes son del tipo:

(119) $$T^{-1}(u)=\{v\in\mathbb{R}^3\mid T(v)=u\}$$

(i) De salida, la sobreyectividad de T, nos garantiza que $T^{-1}\neq\emptyset$
(ii) Supongamos que $v\in T^{-1}(u)$, $v'\in T^{-1}(u)$ y $v\neq v'$. Así si $v=(v_1,v_2,v_3)$ y $v'=(v'_1,v'_2,v'_3)$ entonces vale la igualdad.

(120) $$(v_1+v_2+v_3-v'_1-v'_2-v'_3,v_1-v_2-v_3-v'_1+v'_2+v'_3)=(0,0,0)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} T(v-v') &= T(v_1-v'_1,v_2-v'_2,v_3-v'_3)\\ &= (v_1-v'_1+v_2-v'_2+v_3-v'_3,v_1-v'_1-v_2+v'_2-v_3+v'_3))\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que si existe $u\neq 0$, tal que $T^{-1}(u)$ posee más de un elemento entonces

(121) $$v\in T^{-1}(u)\wedge v'\in T^{-1}(u)\Longrightarrow(v-v')\in T^{-1}(0,0)$$

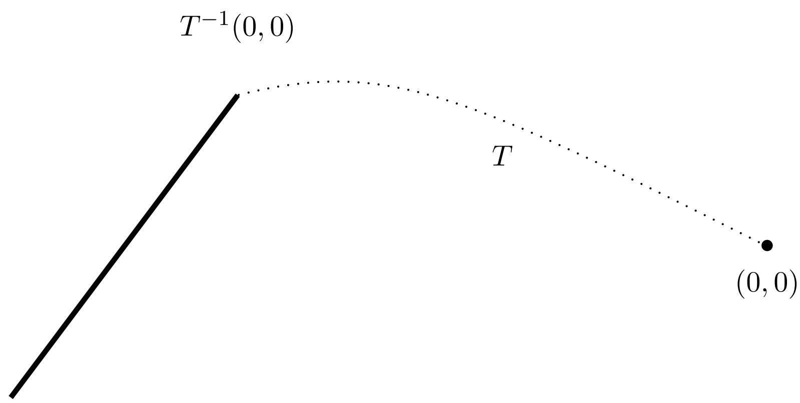
(iii) Además, como $T(0,0,0)=(0,0)$ entonces T no es inyectiva porque $T^{-1}(0,0)$ posee más de un elemento. En este caso el conjunto en cuestión es:

$$\begin{aligned}
u\in T^{-1}(0,0) &\iff u=(x,y,z)\wedge T(x,y,z)=(0,0)\\
&\iff u=(x,y,z)\wedge (x+y+z,x-y-z)=(0,0)\\
&\iff u=(x,y,z)\wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x-y-z &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff u=(x,y,z)\wedge [x=0\wedge z=-y]
\end{aligned}$$

Finalmente,

(122) $$T^{-1}(0,0)=\{(0,y,-y)\mid y\in\mathbb{R}\}$$

Geometricamente la línea $T^{-1}(0,0)$ se transforma en el punto $O=(0,0)$



(6) Sea $T:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z)=(x-y,x+2y+3z,x+y)$ entonces

(a) T es inyectiva.

En efecto

supongamos que $T(x,y,z)=T(x',y',z')$ entonces

$$\begin{array}{l} T(x,y,z)=T(x',y',z')\\ \Updownarrow\\ (x-y,x+2y+3z,x+y)=(x'-y',x'+2y'+3z',x'+y')\end{array}$$

Luego,

(123) $$\begin{array}{llcl} (1) & x-y &=& x'-y'\\ (2) & x+2y+3z &=& x'+2y'+3z'\\ (3) & x+y &=& x'+y'\end{array}$$

Haciendo (1)-(2) tenemos que $2x=2x'$. Así que

(124) $$x=x'$$

Sustituyendo (124) en (1), tenemos que $-y=-y'$. Así que

(125) $$y=y'$$

Sustituyendo (124) y (125) en (2) tenemos que $3z = 3z'$. Así que

(126) $$z = z'$$

Por tanto conjuntando, (124), (125) y (126), concluimos que T es inyectiva.

Observen en particular, que $T^{-1}(0,0,0) = \{(0,0,0)\}$

(b) T es sobreyectiva.

En efecto

Debemos resolver para $(p,q,r) \in \not{\mathbb{R}}^3$ dado la ecuación,

(127) $$T(x,y,z) = (p,q,r)$$

Equivalentemente, resolvemos el sistema

(128) $$\begin{array}{lrcl} (1) & x - y & = & p \\ (2) & x + 2y + 3z & = & q \\ (3) & x + y & = & r \end{array}$$

Haciendo (1) + (3), tenemos que $2x = p + r$. Así que

(129) $$x = \frac{p+r}{2}$$

Sustituyendo (129) en (1), tenemos que $\dfrac{p+r}{2} - y = p$. Así que

(130) $$y = \frac{r-p}{2}$$

Sustituyendo (129) y (130) en (2), tenemos que $\dfrac{p+r}{2} + 2\left[\dfrac{r-p}{2}\right] + 3z = q$. Así que

(131) $$z = \frac{2q + p - 3r}{6}$$

Sustituyendo (129), (130) y (131) en (127), tenemos que:

(132) $$T\left(\frac{p+r}{2}, \frac{r-p}{2}, \frac{2q+p-3r}{6}\right) = (p,q,r)$$

Finalmente, la ecuación (132), garantiza que T es Sobreyectiva y además nos permite construir su inversa T^{-1}, definida por:

(133) $$T^{-1}(p,q,r) = \left(\frac{p+r}{2}, \frac{r-p}{2}, \frac{2q+p-3r}{6}\right)$$

Como una forma de verificar la eficacia de su trabajo, calcule y comprube que:

$$T \circ T^{-1}(p,q,r) = (p,q,r) \qquad \wedge \qquad T^{-1} \circ T(p,q,r) = (p,q,r)$$

(7) Sean f y g dos funciones reales tales que $f \circ g$ es bien definido. Si f inyectiva y g inyectiva entonces $f \circ g$ es inyectiva.

En efecto

(i) P.d.q. $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y) \Longrightarrow x = y$

(ii) Datos. $f(u) = f(t) \Longrightarrow u = t$ y $g(s) = g(r) \Longrightarrow s = r$

(iii) Ejecución:

$$\begin{array}{rcll} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(y) & \Longleftrightarrow & f(g(x)) = f(g(y)) & \\ & \Longrightarrow & g(x) = g(y) & f \text{ inyectiva} \\ & \Longrightarrow & x = y & g \text{ inyectiva} \end{array}$$

3.3. Ejercicios Propuestos de Funciones.

(1) Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $f^{-1}([1,4])$

(2) Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $f^{-1}(1)$

(3) Si $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(5-x)}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $f((1,5))$

(4) Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{x-7}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $graf(f)$

(5) Sea $f(x) = \begin{cases} -2 : & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} : & x > 0 \end{cases}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $graf(f)$

(6) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} : & x \neq 2 \\ 1 \quad : & x = 2 \end{cases}$ entonces determine:
   (i) $dom(f)$
   (ii) $Img(f)$
   (iii) $graf(f)$

4. Relaciones Trigonométricas Básicas

4.1. Introducción.

Consideremos la siguiente situación geométrica:

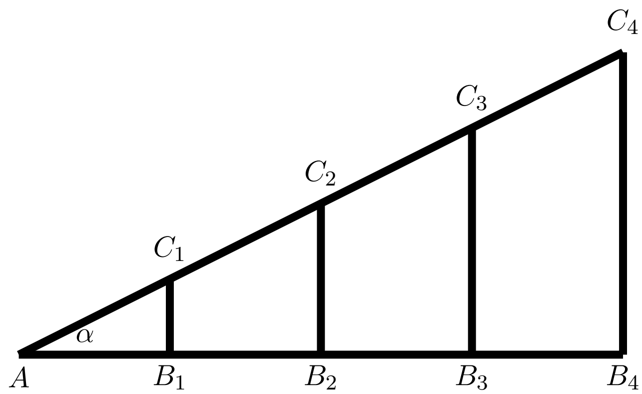


Figura 15

En la figura todos los triángulos son rectángulos y valen las relaciones:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AB_4}} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Definición 4.1.1. *(Definición Básica de las funciones trigonométricas)*

Denominaremos:

$$\begin{array}{llcl}
\textit{Seno del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \sin\ \alpha & = & \dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \\[2ex]
\textit{Coseno del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \cos\ \alpha & = & \dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} \\[2ex]
\textit{Tangente del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \tan\ \alpha & = & \dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} \\[2ex]
\textit{Cotangente del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \textit{cot}\ \alpha & = & \dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}} \\[2ex]
\textit{Secante del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \sec\ \alpha & = & \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} \\[2ex]
\textit{Cosecante del ángulo } \alpha \textit{ al cuociente} & \textit{csc}\ \alpha & = & \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}
\end{array}$$

Para una mayor información al respecto ver la bibliografía adicional y en particular a [**2**, p.136]

4.2. Funciones Trigonométricas.

(1) **Medición de ángulos:** Usaremos para nuestras definiciones un círculo de radio 1 y con centro en el origen, es decir tenemos el conjunto:

$$S^1 \quad : \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \tag{134}$$

Su diseño es:

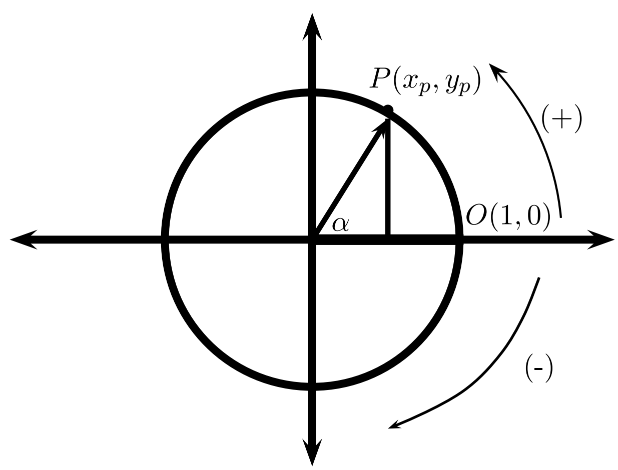


Figura 16

Algunas observaciones:

(a) Fijaremos el origen o punto de partida (es imprescindible hacerlo) del cìrculo S^1 en el punto $(0,1)$, para poder contar las vueltas. De acuerdo a esto tenemos que una vuelta corresponde a 360 grados, es decir:

(135) $$\text{Una vuelta} \quad = \quad 360 \cdot 1^\circ$$

(b) Consideraremos un ángulo positivo si se toma en como en la figura (contrario a los minuteros del reloj !!!), y negativo en el otro sentido.

(c) Existe otra alternativa para medir ángulos; esta tiene que ver con el perimetro del circulo:

(i) El ángulo α mide un radián si la longitud del arco que subtiende $\overline{PO}$ es un radio

(ii) Una vuelta corresponde a 2π radianes, es decir:

(136) $$\text{Una vuelta} \quad = \quad 2\pi \cdot 1rad$$

(d) Comparando (135) y (136) tenemos que:

(137) $$360 \cdot 1^\circ = 2\pi \cdot 1rad \quad \Longrightarrow \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{2\pi}{360} \cdot 1rad \\ Y \\ 1rad = \dfrac{360}{2\pi} \cdot 1^\circ \end{cases}$$

(e) Luego, tenemos por ejemplo que:

- $1rad \approx 57.29^\circ$
- $180^\circ = \pi rad$
- $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}rad$
- $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}rad$
- $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}rad$
- $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}rad$
- $15^\circ = 15 \cdot 1^\circ = 15 \cdot \dfrac{2\pi}{360} \cdot 1rad = \dfrac{\pi}{12}rad$

(2) **Definición de las Funciones Trigonométricas**

De acuerdo a la definición (4.1.1) tenemos que en el círculo S^1 podemos hacer las definiciones de las funciones trigonométricas como sigue:

Definición 4.2.1.

(a) *Función Seno:*

(138) $$\begin{array}{rccl} sen & : & \mathbb{R} & \longmapsto & [-1,1] \\ & & x & \longmapsto & sen(x) = y_p \end{array}$$

(b) *Función Coseno:*

(139)
$$\begin{array}{rcccl} \cos & : & \mathbb{R} & \longmapsto & [-1,1] \\ & & x & \longmapsto & \cos(x) = x_p \end{array}$$

(c) *Función Tangente:*

(140)
$$\tan(x) = \frac{senx}{\cos x} \quad \textit{definida para los } x \in \mathbb{R} \textit{ tal que } \cos x \neq 0$$

(3) **Algunos valores de las funciones Seno, Coseno y Tangente**

(a) Ángulos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$:

$\frac{\text{Función}}{\text{Ángulo}}$	*seno*	*coseno*	*tangente*
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$no\,definida$
π	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$no\,definida$
2π	0	1	0

(b) Ángulos $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}$:

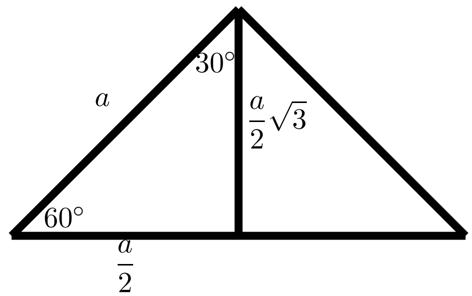


Figura 17

Entonces

$\dfrac{\text{Función}}{\text{Ángulo}}$	*seno*	*coseno*	*tangente*
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(c) Ángulos $\dfrac{\pi}{4}$:

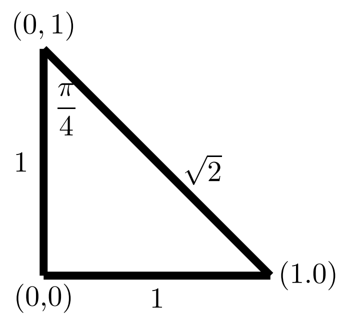


Figura 18

Entonces

$\dfrac{\text{Función}}{\text{Ángulo}}$	*seno*	*coseno*	*tangente*
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$	1

(4) **Propiedades inmediatas de las funciones trigonométricas**

Si consideramos nuevamente el círculo S^1

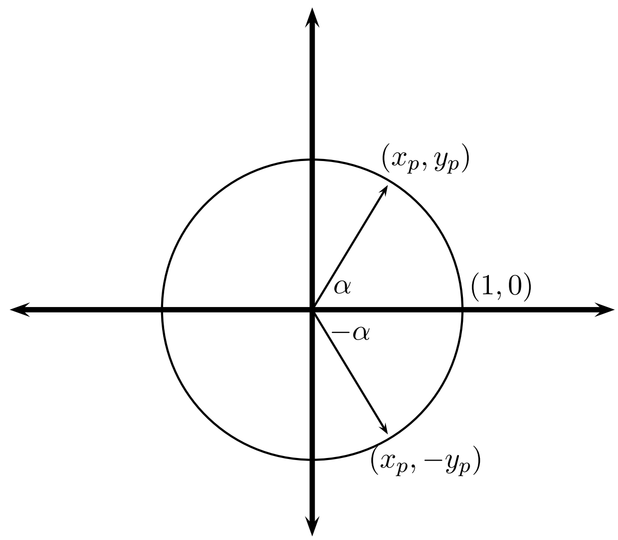


Figura 19

Entonces

(a) Periodicidad

Como α le corresponde el punto(x_p, y_p) y a $(\alpha{+}2\pi)$ le corresponde el punto(x_p, y_p) entonces tenemos que,

$$sen(\alpha) = sen(\alpha + 2\pi), \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) \text{ y por tanto, } \tan(\alpha) = \tan(\alpha + 2\pi)$$

Por otra parte, las funciones definidas sólo dependen del punto (x_p, y_p) en S^1 que posee perímetro 2π. Así que una vuelta es la menor longitud necesaria para que un ángulo y por tanto una función trigonométrica se repita, a este menor número lo llamamos el periodo de la función trigonométrica.

Conclusión 4.2.2.

Las funciones Seno y Coseno son periódicas de periodo 2π, y la función y Tangente es periódica de periodo πes decir:

$$\begin{aligned} sen(\alpha) &= sen(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan(\alpha) &= \tan(\alpha + k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(b) Paridad

Observemos que por construcción tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} sen(\alpha) &=& y_p \wedge sen(-\alpha) = -y_p \quad\Longrightarrow\quad sen(-\alpha) = -sen(\alpha) \\ \cos(\alpha) &=& x_p \wedge \cos(-\alpha) = x_p \quad\Longrightarrow\quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \tan(\alpha) &=& \frac{y_p}{x_p} \wedge \tan(-\alpha) = -\frac{y_p}{x_p} \quad\Longrightarrow\quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \end{array}$$

Conclusión 4.2.3.

1. Seno es una función impar
2. Coseno es una función par
3. Tangente es una función impar

(5) **Sus gráficos son:**

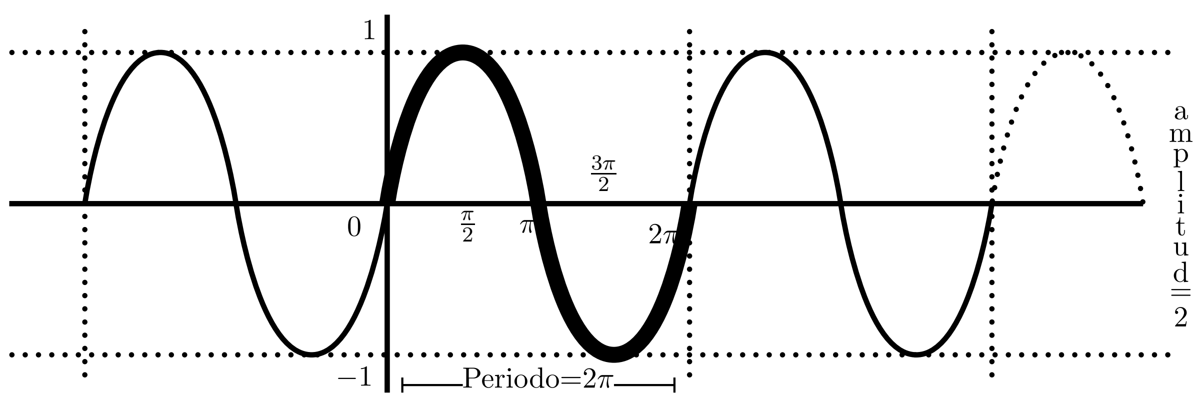


Figura 20 $y = \sin x$

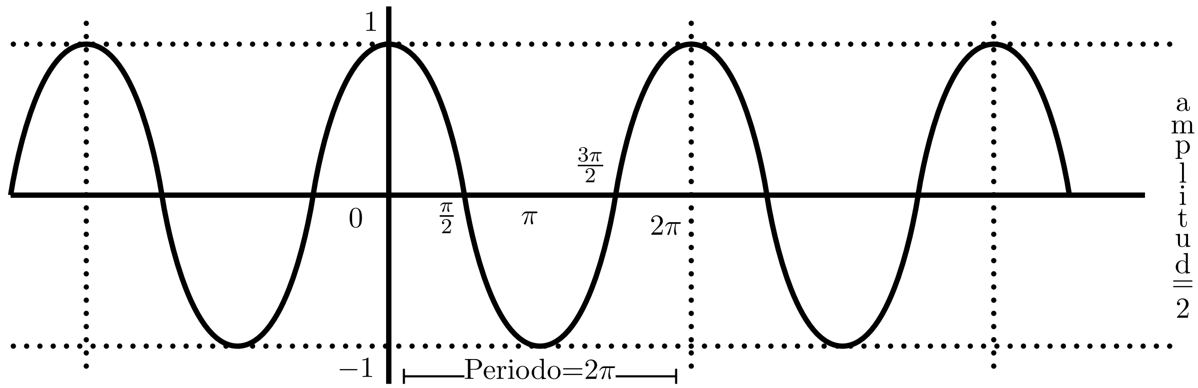


Figura 21 $\quad y = \cos x$

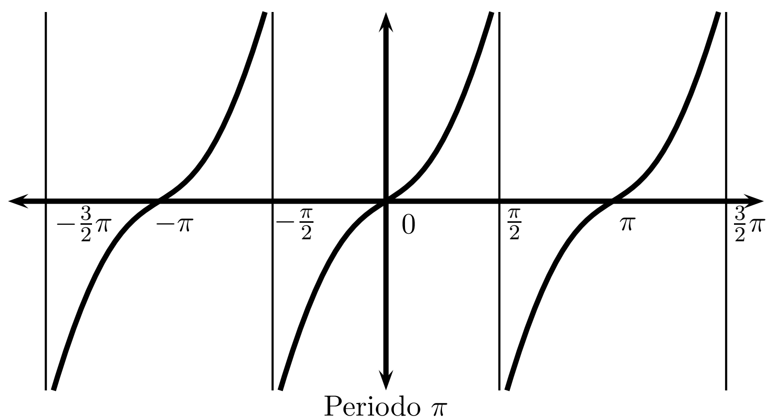


Figura 22 $\quad y = \tan x$

(6) **Otras funciones trigonométricas**

(a) Función Cotangente:

$$\cot(x) \quad = \quad \frac{1}{\tan(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}]$$

(b) Función Secante:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{(2n-1)\frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\}]$$

(c) Función Cosecante:

$$\csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}]$$

(7) **Identidades Básicas**

Lema 4.2.4.

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (\forall \alpha; \alpha \in \mathbb{R})$

en efecto

Por construcción tenemos que $x_p^2 + y_p^2 = 1$, luego tenemos la identidad básica:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Observación 4.2.5.

Consideremos en el círculo unitario S^1 la situación siempre posible!!!.

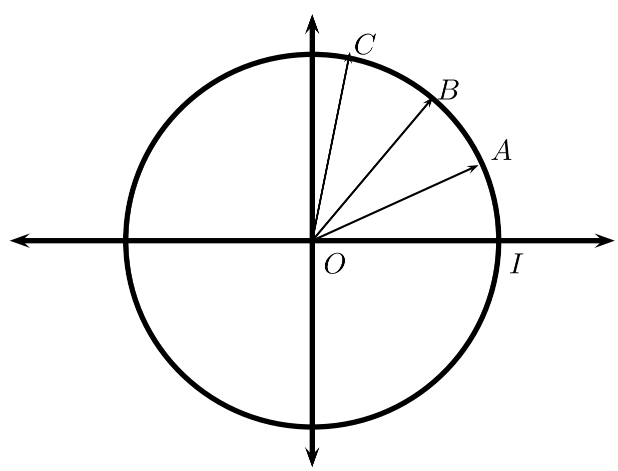


Figura 23

Tal que:

- *La medida del ángulo IOB es igual que la medida del ángulo AOC*

- *Si* $\angle IOC = \alpha$ *y* $\angle IOA = \beta$ *entonces* $\angle IOB = \alpha - \beta$ *y tenemos que:*

$$\begin{array}{rcl}
d(I,B) & = & d(A,C) \\
& \Updownarrow & \\
\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(sen(\alpha-\beta)-0)^2} & = & \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha - sen\beta)^2} \\
& \Downarrow & \\
(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(sen(\alpha-\beta)-0)^2 & = & (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha - sen\beta)^2 \\
& \Updownarrow & \\
2-2\cos(\alpha-\beta) & = & 2-2(\cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta) \\
& \Updownarrow & \\
\cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta
\end{array}$$

Hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 4.2.6.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

Consecuencia 4.2.7.

(a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$

En efecto

$$\begin{array}{rcll}
\cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha-(-\beta)) & \\
& = & \cos\alpha\cos(-\beta) + sen\alpha sen(-\beta) & (\ \textit{aplica}\ (4.2.6)) \\
& = & \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta & (\textit{paridad del coseno e imparidad del seno})
\end{array}$$

(b) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

En efecto

$$\begin{array}{rcl}
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\cos\beta \\
& \Downarrow & \\
\cos\alpha\cos\beta & = & \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}
\end{array}$$

(c) $sen\alpha sen\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) &= 2sen\alpha sen\beta \\
&\Downarrow \\
sen\alpha sen\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}
\end{aligned}$$

(d) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

En efecto

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) \\
&= \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha \\
&= \cos\alpha\cos^2\alpha - sen^2\alpha
\end{aligned}$$

(e) $sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

En efecto

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + sen\frac{\pi}{2}sen\alpha \\
&= 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot sen\alpha \\
&= sen\alpha
\end{aligned}$$

(f) $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

En efecto

$$\begin{aligned}
sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \\
&= \cos\alpha
\end{aligned}$$

(g) $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

En efecto

$$\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen\beta \\
&= sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta
\end{aligned}$$

(h) *Otras identidades que pueden ser demostradas como las anteriores son:*

(i) $sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cos\beta - sen\beta \cos\alpha$

(ii) $sen2\alpha = 2sen\alpha \cos\alpha$

(iii) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

(iv) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

(v) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

(vi) $sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$

(vii) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

(viii) $\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

(8) **Aplicaciones**

(a) Resolución de Triángulos

Definición 4.2.8.

Resolver un triángulo significará determinar los lados y los ángulos de un triángulo.

Observación 4.2.9.

(i) *De acuerdo a la definición debemos encontrar una relación entre los lados a, b, c y los ángulos α, β, γ*

(ii) *Consideremos la situación geométrica.*

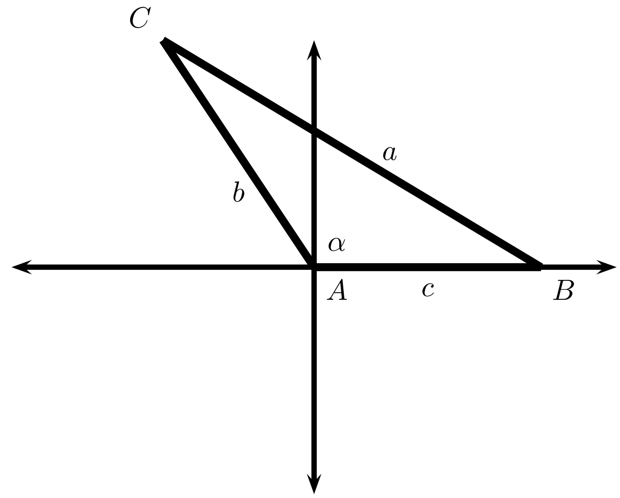


Figura 24

Tal que: $A = (0,0)$; $B = (c,0)$; $C = (b\cos\alpha, bsen\alpha)$ *entonces*

$$\begin{aligned}
a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (0 - bsen\alpha)^2 \\
&= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2 sen^2\alpha \\
&= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}$$

Así hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 4.2.10. **Teorema del Coseno**
En un triágulo cualquiera con sus elementos dispuestos de la forma:

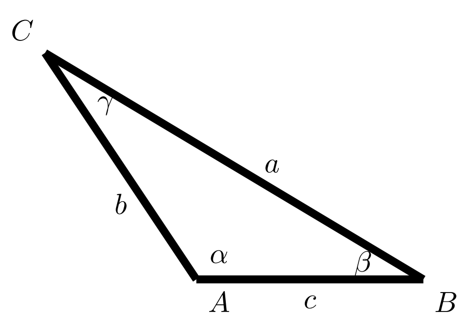


Figura 25

Tenemos las siguientes relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(iii) *Observemos que:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ sen^2\alpha &= 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2} \end{aligned}$$

Un cálculo analogo, para la relación $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ nos da que:

$$sen^2\beta = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2c^2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} 4b^2c^2sen^2\alpha &= 4a^2c^2sen^2\beta \\ &\Downarrow \\ \frac{sen\alpha}{a} &= \frac{sen\beta}{b} \end{aligned}$$

De igual manera se puede mostra que

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\gamma}{c}$$

Lo que estamos mostrando es que vale el teorema

Teorema 4.2.11. **Teorema del seno**
En un triágulo cualquiera ABC tenemos las relaciones:

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

En realidad lo que vale es que ambos teoremas son equivalentes!!!

Ejemplo 4.2.12.

Resuelva un triángulo ABC si sus lados miden $a = 90$; $b = 70$; $c = 40$:

Solución

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Luego $\alpha \approx 107^\circ$

analogamente

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Luego $\beta \approx 48°$

finalmente: $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 25°$

(b) **Ecuaciones Trigonométricas**

Definición 4.2.13.

Una ecuación trigonométrica es una ecuación donde las variables o incognitas solo aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 4.2.14.

- $sen^2 x = \tan x$
- $sen x + \cos x = 1$

Observación 4.2.15.

Dada la periodicidad de las funciones trigonométricas, si una ecuación tiene una solución x *entonces tiene infinitas soluciones de la forma* $x + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.2.16.

En la ciudad de Boston el número de horas de luz diurna $d(t)$ *se puede calcular a través de la ecuación trigonométrica:*

$$d(t) = 3sen\frac{2\pi}{365}(t-79)+12$$

Con t *días y* $t=0$ *correspondiente al 1 de enero. ¿ Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna ?*

1. Resolver el problema significa encontrar a *y* b *tal que se verifica la relación* $0 < a < t < b < 365$ *con* $d(a) = d(b) = 10.5$

2. Resolvamos la ecuación para determinar a y b.

$$
\begin{array}{rcl}
3sen\dfrac{2\pi}{365}(t-79)+12 = 10.5 & \Longleftrightarrow & sen\dfrac{2\pi}{365}(t-79) = -0.5 \\
 & \Downarrow & \\
\dfrac{2\pi}{365}(t-79) = 210^\circ & \vee & \dfrac{2\pi}{365}(t-79) = 330^\circ \\
 & \Downarrow & \\
t \approx 292 & \vee & t \approx 414 \\
 & \Downarrow & \\
t \approx 292 & \vee & t \approx 414 - 365 = 49
\end{array}
$$

Por tanto más de 10.5 *horas de luz habrá entre* $a = 49$ *y* $b = 292$*, es decir 243 días al año.*

(c) **La función Sinusoidal**

1. Recordemos que los gráficos de las funciones seno y coseno son:

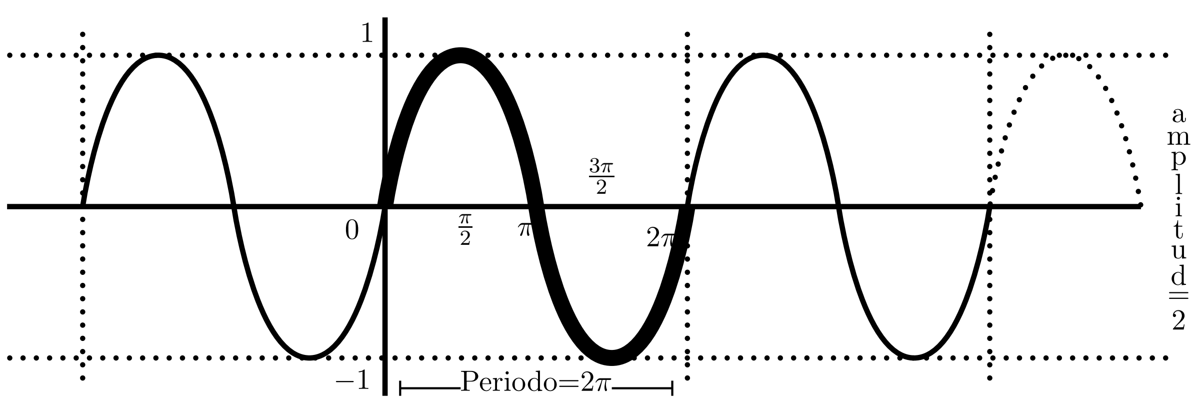


Figura 26 $\quad y = \sin x$

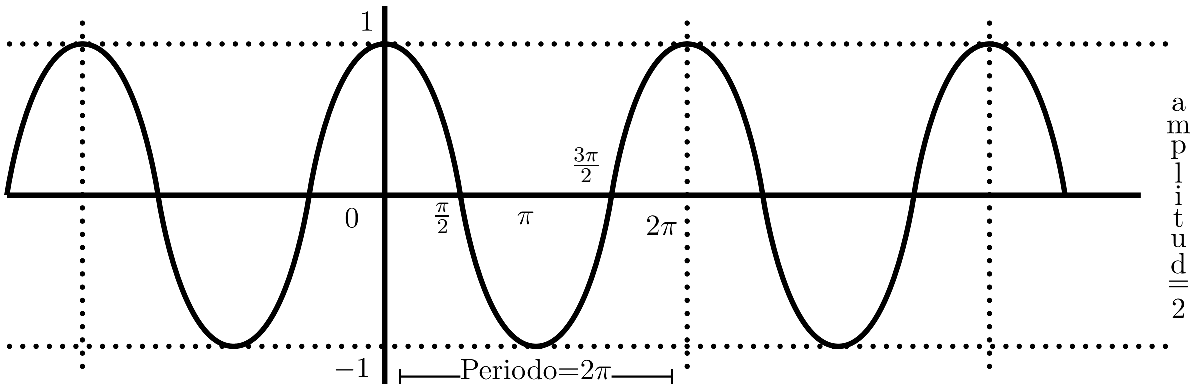


Figura 27 $y = \cos x$

De lo anterior podemos observar lo siguiente:

(i) Desarrollando el seno y el coseno de suma de ángulos tenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \text{y} \tag{141}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{142}$$

entonces de (141), sigue que

$$\begin{aligned}\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos x \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Conclusión 4.2.17.

La función coseno se obtiene trasladando la función Seno en $\frac{\pi}{2}$ o en 90°

Así por ejemplo del gráfico de seno observamos que:

$$\begin{aligned}\cos 0 &= \sin(0 + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin\frac{\pi}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

analogamente de (142), sigue que

$$
\begin{aligned}
\cos(x-\frac{\pi}{2}) &= \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} \\
&= \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 \\
&= \sin x
\end{aligned}
$$

Conclusión 4.2.18.

La función seno se obtiene trasladando la función coseno en $-\frac{\pi}{2}$ o en -90° o 270°

Así por ejemplo del gráfico de coseno observamos que:

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2} &= \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}) \\
&= \cos 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(ii) como se ve las figuras, 1 y 2 la amplitud de ambas ondas es 1, sin embrago podemos alterar dicha amplitud, digamos **"A"**, a voluntad facilmente, multiplicando por el valor deseado.

En general, para $A \in \mathbb{R}$ arbitrario tenemos que:

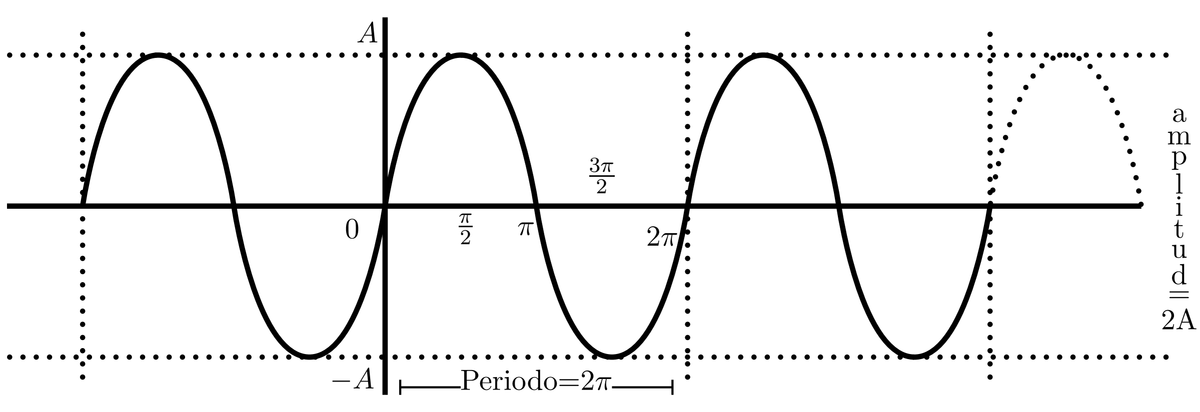


Figura 28 $y = A \sin x$

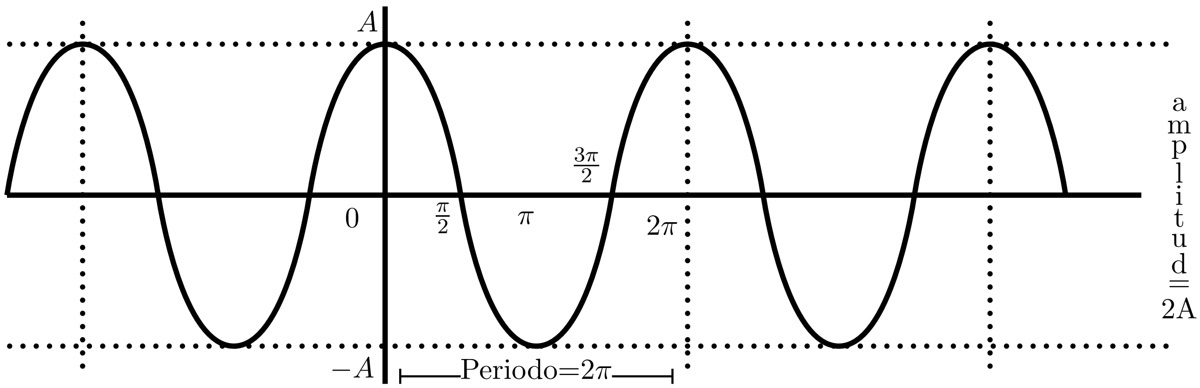


Figura 29 $\quad y = A\cos x$

(iii) De las figuras (1) y (2), podemos ver que el periodo de ambas funciones es 2π, sin embargo podemos alterarlo a voluntad como sigue.

Por ejemplo para;

(A) $y = sin(\dfrac{x}{2})$

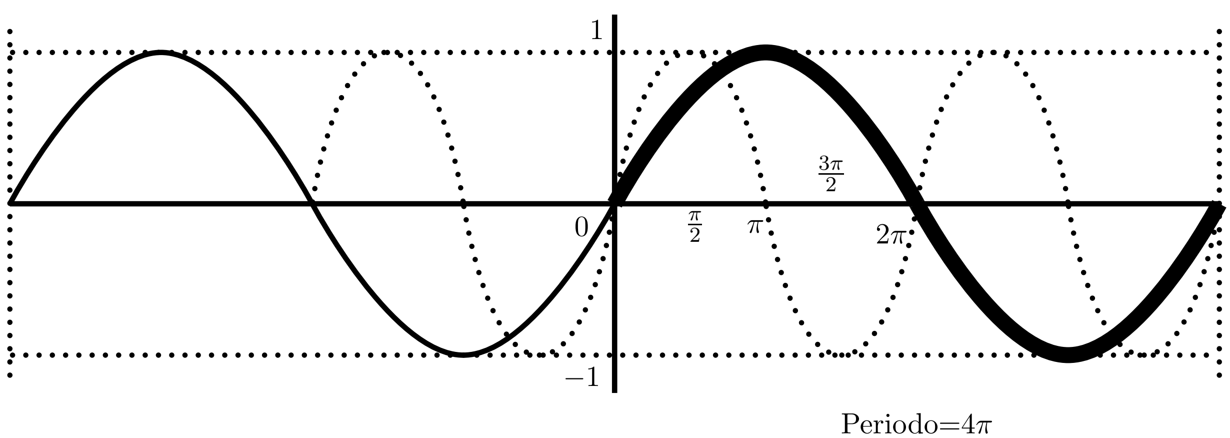


Figura 30 $\quad y = \sin \frac{x}{2}$

(B) $y = 3\cos(2x)$

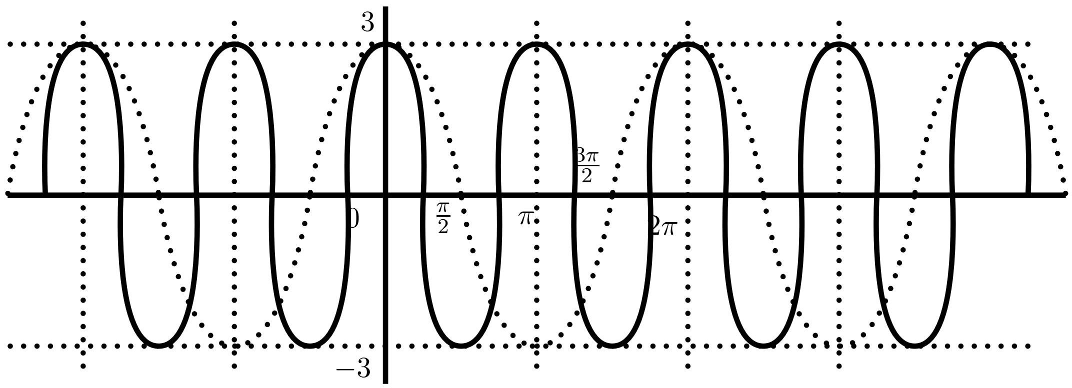


Figura 31 $y = 3\cos 2x$

(C) $y = \sin(2x - \dfrac{\pi}{2})$

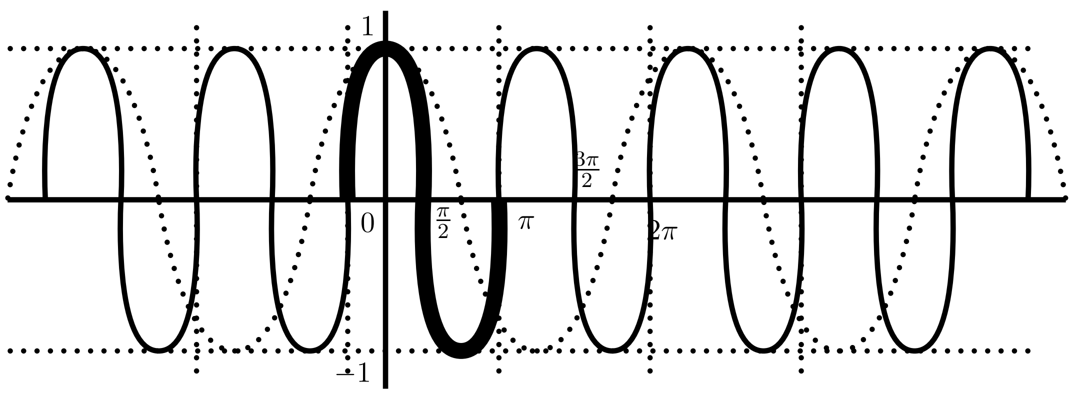


Figura 32 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

2. **Función Cosenusoidal**

Definición 4.2.19.

Llamaremos función sinusoidal genérica a una función del tipo:

$$f(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x \tag{143}$$

Ejemplo 4.2.20.

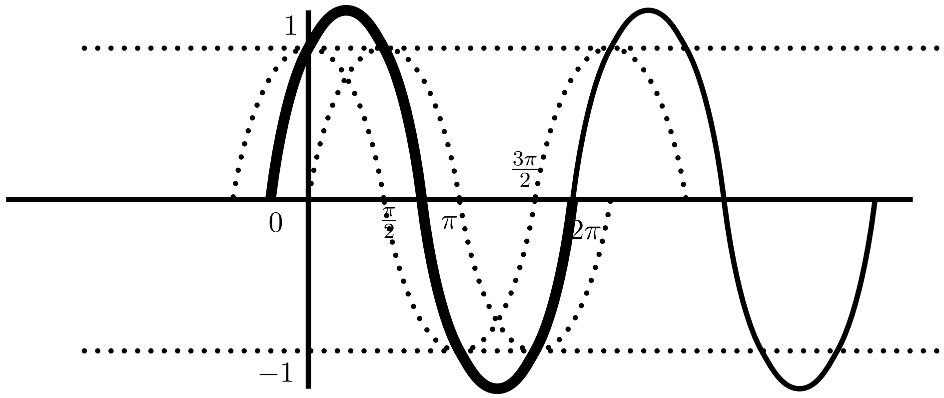


Figura 33 $y = \sin x + \cos x$

Observación 4.2.21.

Consideremos la función sinusoidal genérica (143) *entonces*

$$\begin{aligned} f(x) &= a\sin\omega x + b\cos\omega x \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)[a\sin\omega x + b\cos\omega x] \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a\sin\omega x + b\cos\omega x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right] \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, podemos ver directamente que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego, existe un ángulo, llamado por ejemplo φ *tal que:*

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \wedge \qquad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{144}$$

En efecto,

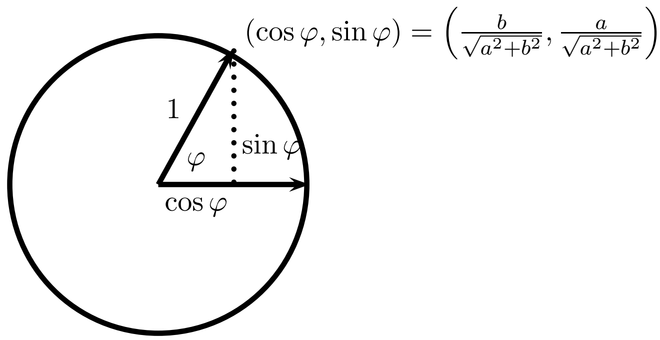


Figura 34

Sustityendo en (*) tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right] \\ &= \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{A}(\sin\varphi\sin\omega x + \cos\varphi\cos\omega x) \\ &= A\cos(wx-\varphi) \end{aligned}$$

3. **Propiedades de** $f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$

(i) f es periódica

En efecto

$$\begin{aligned} f(x+T) &= A\cos(\omega(x+T)-\varphi) \\ &= A\cos(\omega x + \omega T - \varphi) \end{aligned}$$

Pero la función coseno es periódica de periodo 2π, así que:

$$f(x) = f(x+2\pi) = A\cos(\omega x + 2\pi - \varphi) \Longrightarrow \omega T = 2\pi \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Conclusión 4.2.22.

f es periódica de periodo $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$ y se llama frecuencia a $|\omega| = \dfrac{2\pi}{T}$

(ii) Para ver el desfase hacemos lo siguiente:

$$A\cos(\omega x - \varphi) \quad = \quad A\cos\left[\omega\left(x - \frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$

Luego, f esta desfasada en $\dfrac{\varphi}{\omega}$

Es decir;

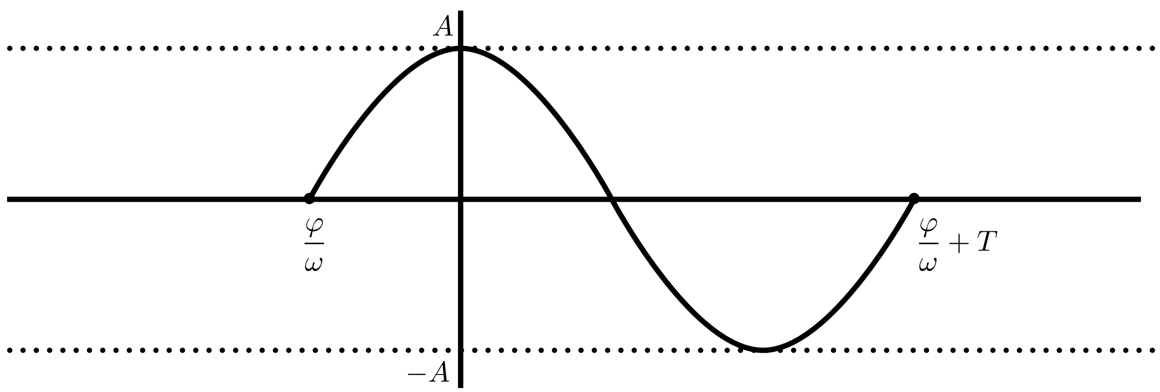


Figura 35 $\quad y = A\cos(\omega x - \varphi)$

(9) **Funciones Trigonométricas inversas**

(a) Función arcoseno o sen^{-1}

Por definición sabemos que:

- $dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Img(sen) = [-1, 1]$
- La función seno es sobreyectiva
- La función seno no es inyectiva, pues por ejemplo $sen(0) = sen(\pi) = 0$ y $0 \neq \pi$. sin embargo podemos hacerla inyectiva haciendo cirugía (cortando adecuadamente) en el dominio como sigue:

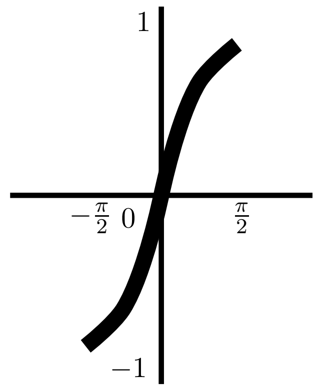


Figura 36 $y = \sin x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

entonces definimos:

(145)
$$\begin{array}{rcccl} sen^{-1} & : & [-1,1] & \longmapsto & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & & x & \longmapsto & y = sen^{-1}(x) \end{array}$$

Luego tenemos por definición que

$$y = sen^{-1}(x) \iff x = sen(y)$$

Definición 4.2.23.

La función definida arriba, sen^{-1} *se llama la función inversa de seno y tambien se denota arcoseno.*

Ejemplo 4.2.24.

(i) $arcoseno(x) = 0 \Longleftrightarrow x = sen(0) = 0$

(ii) $arcoseno(x) = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = sen(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

(iii) $arcoseno(x) = -\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = sen(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$

(b) Función arcocoseno o $\cos^{-1}$

Definición 4.2.25.

Llamaremos arcocoseno o $\cos^{-1}$ *a la función:*

(146)
$$\begin{array}{rcccl} \cos^{-1} & : & [-1,1] & \longmapsto & [0,\pi] \\ & & x & \longmapsto & y = \cos^{-1}(x) \end{array}$$

Ejemplo 4.2.26.

(i) $arcocoseno(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \cos(0) = 1$

(ii) $arcocoseno(x) = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

(iii) $arcocoseno(x) = \pi \Longleftrightarrow x = \cos(\pi) = -1$

(c) Función arcotangente o $\tan^{-1}$

Definición 4.2.27.

Llamaremos arcotangente o $\tan^{-1}$ *a la función:*

(147)
$$\begin{array}{cccc} \tan^{-1} & : \mathbb{R} & \longmapsto & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ & x & \longmapsto & y = \tan^{-1}(x) \end{array}$$

Ejemplo 4.2.28.

(i) $arcotangente(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \tan(0) = 0$

(ii) $arcotangente(x) = \dfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

(d) Analogamente definimos las otras funciones inversas:

(i) $y = \cot^{-1}(x) = arcocotangente(x) \Longleftrightarrow x = \cot(y)$

(ii) $y = \sec^{-1}(x) = arcosecante(x) \Longleftrightarrow x = \sec(y)$

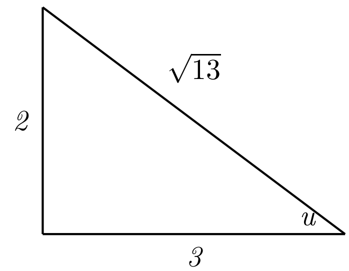
(iii) $y = \csc^{-1}(x) = arcocosecante(x) \Longleftrightarrow x = \csc(y)$

Ejemplo 4.2.29.

(i) *Determinemos el valor de la expresión:* $\sec\left(arcotangente\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$

Solución

- $u = arcotangente\left(\dfrac{2}{3}\right) \Longleftrightarrow \tan(u) = \dfrac{2}{3}$
- *Construimos un triángulo rectángulo que verifique la definición de la función tangente.*



- *Finalmente para resolver el problema, basta calcular* $\sec(u)$.

$$\sec(u) = \frac{\sqrt{13}}{3} \longrightarrow \sec(arcotangente(\frac{2}{3})) = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

(ii) *Resolvamos la ecuación* $5sen^2x + 3senx - 1 = 0$ *en* $[0, 2\pi]$

- *Sea* $u = senx$ *entonces* $5sen^2x + 3senx - 1 = 0 \Longleftrightarrow 5u^2 + 3u - 1 = 0$
- *Resolviendo la ecuación cuadrática tenemos que:*

$$u = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10} \quad \Longleftrightarrow \quad sen(x) = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \begin{cases} sen^{-1}\left[\frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right] \approx 0.2408 \\ \\ sen^{-1}\left[\frac{-3-\sqrt{29}}{10}\right] \approx -0.9946 \end{cases}$$

- *Finalmente las soluciones son*
  - $x_1 = 0.2408$
  - $x_2 = \pi - 0.248 = 2.9008$
  - $x_3 = \pi + 0.9946 = 4.1361$
  - $x_4 = 2\pi - 0.9946 = 5.2886$

(iii) *Verifiquemos la identidad:* $arcoseno(x) + arcocoseno(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *para* $x \in [-1, 1]$

Solución

- *Sea* $u = arcoseno(x)$ *y* $v = arcocoseno(x)$, *luego* $x = sen(u)$ *y* $x = \cos(v)$

- *Ahora como* $sen(u+v) = sen(u)\cos(v) + sen(v)\cos(u)$ *entonces:*

$$\begin{aligned} sen(u+v) &= x^2 + \sqrt{1-\cos^2(v)}\ \sqrt{1-sen^2(u)} \\ &= x^2 + \sqrt{(1-x^2)^2} \\ &= x^2 + (1-x^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así que

$$u + v = arcoseno(1) = \frac{\pi}{2}$$

4.3. Ejercicios Propuestos.

(1) Si $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ calcule:

(a) $sen\frac{\pi}{8}$ y $\tan\frac{\pi}{8}$

(b) $\cos\frac{3\pi}{8}$ y $sen\frac{3\pi}{8}$ y $\tan\frac{3\pi}{8}$

(c) $\cos\frac{5\pi}{8}$ y $sen\frac{5\pi}{8}$ y $\tan\frac{5\pi}{8}$

(d) $\cos\frac{7\pi}{8}$ y $sen\frac{7\pi}{8}$ y $\tan\frac{7\pi}{8}$

(e) $\cos\frac{\pi}{16}$ y $sen\frac{\pi}{16}$ y $\tan\frac{\pi}{16}$

(2) Desarrolle y reduzca las expresiones:

(a) $(\cos x + senx)^2 + (\cos x - senx)^2$

(b) $(a\cos x + bsenx)^2 + (a\cos x - bsenx)^2$. Si a y b son reales.

(c) $sen^2\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)$

(3) Demuestre que las siguientes funciones son periódicas y determine su periodo:

(a) $f(x) = \cos 3x$

(b) $f(x) = \cos 5x$

(c) $f(x) = sen2x$

(d) $f(x) = sen5x$

(e) $f(x) = sen5x + \cos 5x$

(4) Determine si son pares o impares las funciones:

(a) $g(x) = 2x + 3 + sen3x$

(b) $g(x) = \cos(3x^2) + sex$

(c) $g(x) = sen(2x)\cos(3x)$

(d) $g(x) = \cos^2 x + \cos 3x$

(5) En los siguientes ejercicios usaremos el siguiente vocabulario:
Si un observador en el punto X avista un objeto O entonces el ángulo que forma la linea visual del objeto con la visión normal de sus ojos es el ángulo de elevación del objeto O, (Si este se encuentra sobre la horizontal), o ángulo de depresión del objeto O si esta bajo la horizontal.

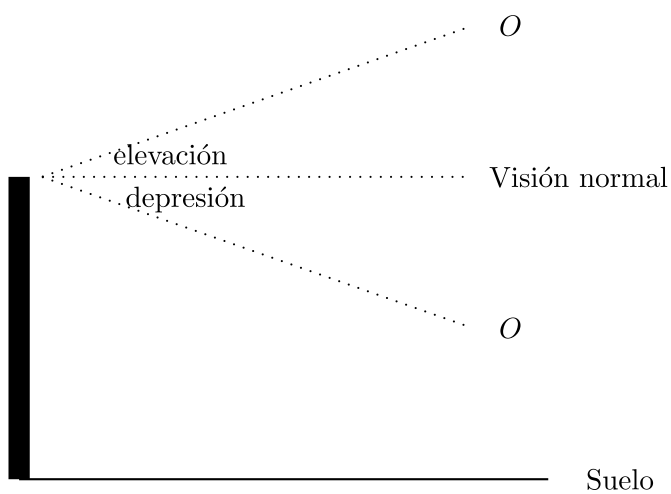


Figura 37

(a) Desde un punto al nivel del suelo y a 135 metros de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es $57°20'$. Calcule la altura de la torre.

(b) Desde un punto P ubicado al nivel del suelo el ángulo de elevación de la parte más alta de la torre es $26°50'$. Desde un punto que esta a 25 metros más cercano a la torre y en la misma linea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la parte alta es de $53°30'$. Calcule la altura de la torre.

(c) Desde lo alto de un edificio que mira al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador esta a 100 pies sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión de la lancha cambia de $25°$ a $40°$ durante el periodo de observación. Calcule la distancia que recorre la lancha.

(6) Resolución de triángulos:

(a) Resuelva los triángulos:

(a)	$\alpha = 60°;$	$b = 20;$	$c = 30$
(b)	$\gamma = 45°;$	$b = 10;$	$a = 15$
(c)	$\beta = 150°;$	$a = 150;$	$c = 30$
(d)	$\beta = 73°;$	$c = 14;$	$a = 87$
(e)	$a = 2;$	$b = 3;$	$c = 4$
(f)	$a = 10;$	$b = 15;$	$c = 12$

(b) El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide $73°40'$ y los lados que se unen en esta esquina miden 175 pies y 150 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

(c) Para hallar la distancia entre los puntos, A y B un agrimensor escoge un punto C que esta ubicado a 420 yardas de A y a 540 yardas de B. Si el ángulo ACB mide $63°10'$. Calcule la distancia entre A y B.

(7) Resuelva las ecuaciones trigonométricas:

(a) $sen(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

(c) $2\cos t + 1 = 0$

(d) $\tan^2 x = 1$

(e) $sen^2 x + senx - 6 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(f) $2\cos^2 x + \cos x = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(g) $sen^2 x + senx - 6 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(h) $2\tan x - \sec^2 x = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(i) $2sen^3 x + sen^2 x - 2senx - 1 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(8) Grafique y determine: Amplitud, periodo, desfase de las funciones:

(a) $y = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $y = 3sen\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

(c) $y = sen\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(d) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(e) $y = \cos(2x - \pi) + 2$

(f) $y = sen\dfrac{1}{x}$

(9) Determine el valor exacto:

(a) $\tan(arcotangente 14)$

(b) $sen\left(arcotangente\left(-\frac{3}{4}\right)-arcoseno\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

(c) $\tan\left(arcotangente\left(\frac{4}{3}\right)-arcocoseno\left(\frac{8}{17}\right)\right)$

(d) $\tan\left(arcocosen\left(\frac{1}{2}\right)-arcoseno\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

(10) Verifique las identidades

(a) $arcosenox = arcotangente\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $arcocosenox + arcocoseno\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (x \in [0,1])$

(c) $arcotangentex + arcotangente\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (x > 0)$

5. Relaciones Básicas y Geometría Analítica

El ambiente de trabajo será el plano $\mathbb{R}^2$, es decir

$$\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{R}^2 & \Longleftrightarrow & u=(x,y)\wedge x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R} \\ y & & \\ (x_1,y_1)=(x_2,y_2) & \Longleftrightarrow & x_1=x_2\wedge y_1=y_2 \end{array} \tag{148}$$

Y su diseño es el tradicional:

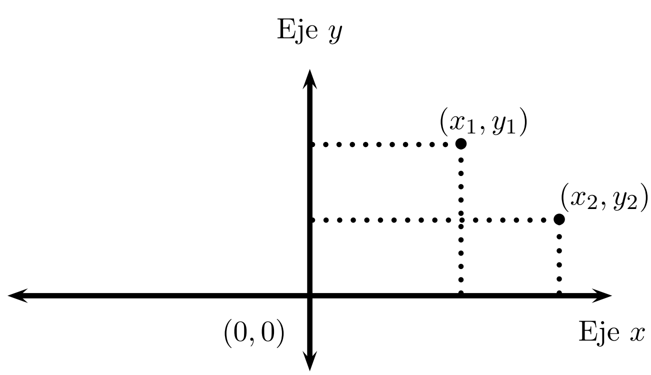


Figura 38

Observación 5.0.1.

Si hacemos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ entonces podemos calcular la distancia de P a Q, como sigue.

Etapa 1: *Completamos el dibujo de la figura anterior:*

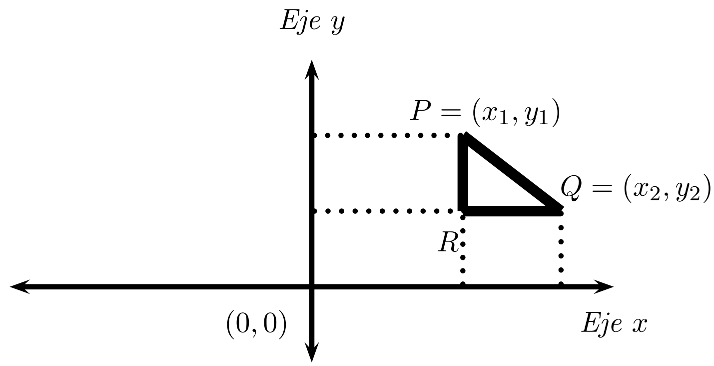


Figura 39

Etapa 2: *Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PRQ y obtenemos:*

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{PQ}^2 & = & \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \\
 & \Updownarrow & \\
\overline{PQ} & = & \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \qquad \textit{distancia de } P \textit{ a } Q
\end{array}
$$

Etapa 3: *Finalmente definimos la distancia de P a Q como sigue*

$$d(P, Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \tag{149}$$

Ejemplo 5.0.2.

$$
\begin{array}{lrcccl}
(1) & d((2,3),(1,4)) & = & \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} & = & \sqrt{2} \\
(2) & d((4,2),(0,0)) & = & \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} & = & 2\sqrt{5} \\
(3) & d((2,3),(2,3)) & = & \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2} & = & 0
\end{array}
$$

5.1. Propiedades de la Distancia entre puntos.

(1) $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$

(2) $d(P, Q) = d(Q, P)$

(3) $d(P, Q) \leq d(P, R) + (R, Q)$

5.2. Función Lineal.

Definición 5.2.1.

Una función se llamará función lineal si existen $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$l(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}) \tag{150}$$

Ejemplo 5.2.2.

(1) $l(x) = 2x + 4$

(2) $l(x) = -x + 1$

(3) $l(x) = 5x$

(4) $l(x) = 3$

Observación 5.2.3.

Si $l(x) = ax + b$ *tal que* $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ *es una función lineal entonces para determinar la función completamente basta con conocer el dominio* $\mathbb{U}$*,* a *y* b

Caso 1: $a = 0$

En este caso $l(x) = b \quad x \in \mathbb{U}$, la llamamos función constante y su gráfico es el conjunto:

$$C(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in \mathbb{U}) \wedge y = b\} \tag{151}$$

Así que tenemos los tres casos posibles

(a) $\mathbb{U} = [-3, 3] \wedge (b > 0)$

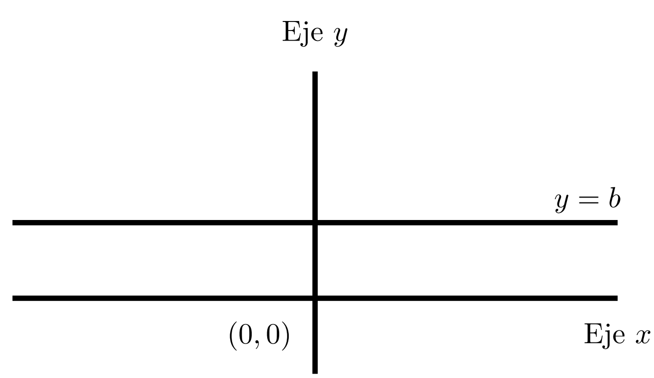


Figura 40

(b) $\mathbb{U} = [-3, 3] \wedge (b = 0)$

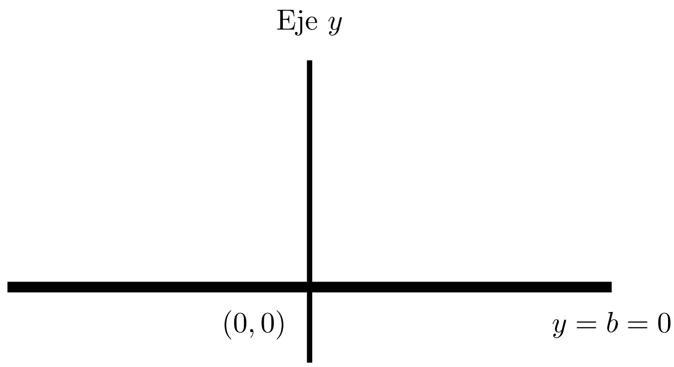


Figura 41

(c) $\mathbb{U} = [-3, 3] \wedge (b < 0)$

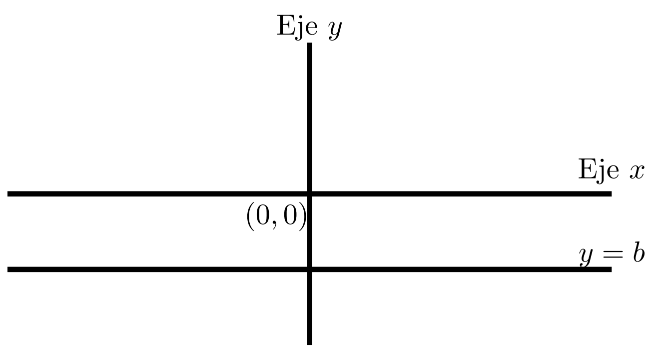


Figura 42

Caso 2: $a \neq 0$

En tal caso, el gráfico de l es del tipo:

$$L(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

Como $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces tenemos dos subcasos:

- $a > 0$

En tal caso el comportamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Longrightarrow ax_1 < ax_2 \\ &\Longrightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \\ &\Longrightarrow l(x_1) < l(x_2) \end{aligned}$$

Es decir que el gráfico es del tipo:

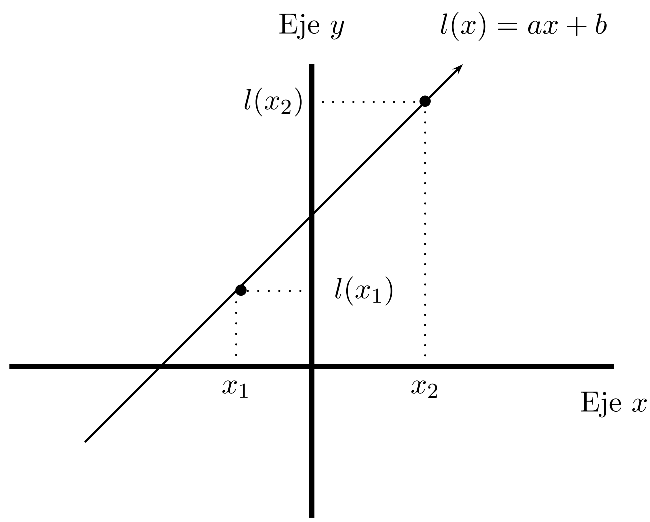


Figura 43

Esta es la definición de una función creciente, es decir

(152) $$l \nearrow \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \Longrightarrow l(x_1) < l(x_2))$$

- $a < 0$

Para este caso el comportamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Longrightarrow ax_1 > ax_2 \\ &\Longrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \\ &\Longrightarrow l(x_1) > l(x_2) \end{aligned}$$

Es decir que el gráfico es del tipo:

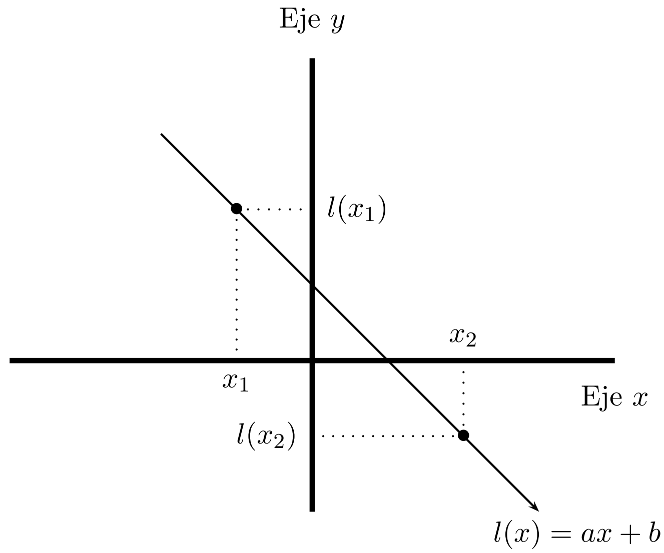


Figura 44

Esta es la definición análoga para una función decreciente, es decir

$$l \searrow \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \Longrightarrow l(x_1) > l(x_2)) \tag{153}$$

Observación 5.2.4.

(1) Sabemos que si $l(x) = ax + b$ es una función lineal con dominio $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ entonces su gráfico es el conjunto de puntos:

$$L(x) = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}\} \tag{154}$$

Al gráfico (154) lo llamaremos línea recta y a la ecuación $y = ax + b$ la llamaremos ecuación canónica de la recta y lo notaremos como sigue:

$$L : y = ax + b \tag{155}$$

Así que de ahora en adelante tenemos la siguiente fórmula proposicional.

$$u \in L \Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \tag{156}$$

Ejemplo 5.2.5.

Si $L : y = 2x - 1$ entonces

- $(2, 3) \in L$, pues $3 = 2 \cdot 2 - 1$

- $(3,2) \notin L$, pues $2 \neq 2\cdot 3 - 1 = 5$

(2) Consideremos la recta $L\ :\ y = ax + b$ y supongamos que $P \in L$ y $Q \in L$ y $P \neq Q$ entonces

$$\begin{aligned} P \in L &\iff P = (x_1, y_1) \wedge y_1 = ax_1 + b \\ Q \in L &\iff Q = (x_2, y_2) \wedge y_2 = ax_2 + b \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} P \in L \wedge Q \in L &\iff \left.\begin{array}{ccccc} y_1 & = & ax_1 & + & b \\ y_2 & = & ax_2 & + & b \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \\ &\Longrightarrow a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \qquad x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

Además sustituyendo en la primera ecuación el valor de a tenemos que

$$\begin{aligned} y_1 = ax_1 + b &\iff b = y_1 - ax_1 \\ &\iff b = y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x_1 \\ &\iff b = \frac{y_1(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)x_1}{x_1 - x_2} \\ &\iff b = \frac{y_1x_1 - y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x_1}{x_1 - x_2} \\ &\iff b = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Conclusión 5.2.6.

De la observación anterior sigue que, dados $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ y $P \neq Q$ entonces existe una única recta L que pasa por P y Q cuya ecuación canónica es de la forma;

$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x + \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2) \tag{157}$$

Definición 5.2.7.

$a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ $(x_1 \neq x_2)$ se llama la pendiente de la recta L.

Ejemplo 5.2.8.

Determine la recta que pasa por los $P = (1,2)$ y $Q = (-3,5)$

Solución

Etapa 1: Sea $L \, : \, y = ax + b$ la recta pedida

Etapa 2: Análisis de los datos del problema:

- $(1,2) \in L \Longleftrightarrow 2 = a \cdot 1 + b$
- $(-3,5) \in L \Longleftrightarrow 5 = a \cdot (-3) + b$
- Luego,

$$\begin{aligned}
(1,2) \in L \wedge (-3,5) \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{ccccc} 2 & = & a & + & b \\ 5 & = & -3a & + & b \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad -3 = 4a \\
&\Longleftrightarrow \quad a = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

- Sustituyendo el valor de a tenemos que

$$b + a = 2 \Longrightarrow b = 2 + \frac{3}{4} \Longrightarrow b = \frac{11}{4}$$

Etapa 3: Sustituyendo en L tenemos que la ecuación pedida es:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Longleftrightarrow 4y + 3x - 11 = 0$$

Observación 5.2.9.

Existen otras formas de la ecuación de la recta como por ejemplo:

$$\begin{aligned}
ax + by + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad by = -ax - c \\
&\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}
\end{aligned}$$

Definición 5.2.10.

La ecuación $ax + by + c = 0$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se llama ecuación general de la recta.

Ejemplo 5.2.11.

Determinemos la pendiente de la recta $3x + 5y - 4 = 0$

Solución

$$\begin{aligned}
3x + 5y - 4 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5y = -3x + 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Luego, la pendiente es $a = -\dfrac{3}{5}$

Otra forma de representar una recta, dada su pendiente y un punto se conoce como la ecuación " punto - pendiente ":

Definición 5.2.12.

Si $P = (x_1, y_1)$ entonces la ecuación de la recta que tiene pendiente a y pasa por P es dada por:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \tag{158}$$

5.3. Clasificación de Rectas.

(1) **Rectas Paralelas**

Consideremos las recta $L : y = 2x + 1$ y $L' : y = 2x + 2$ entonces sus gráficos son de la forma:

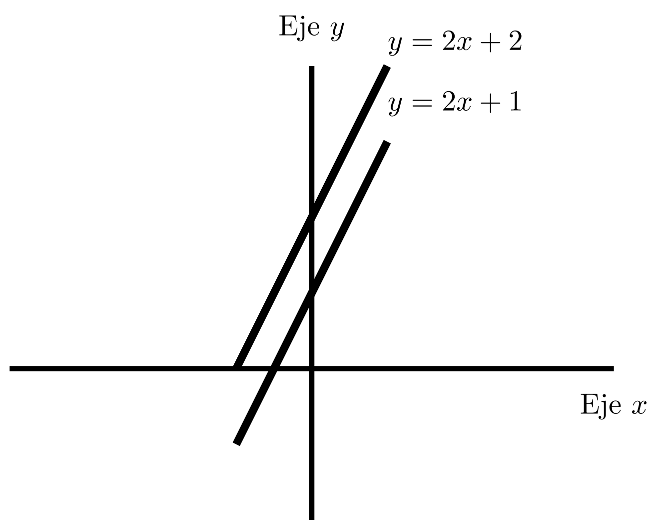


Figura 45

Definición 5.3.1.

Si $L : y = a_L x + b_L$ y $L' : y = a_{L'} x + b_{L'}$ son dos rectas. Diremos que L es paralela a $L' (L \parallel L')$ si $a_L = a_{L'}$

Ejemplo 5.3.2.

Determine la ecuación de la recta L que pasa por el punto P de intersección de las rectas $L' : y = 3x - 1$ y $L'' : y = -x + 5$ y que es paralela a la recta L''' que pasa por los puntos $Q = (1, 1)$ y $R = (-4, -1)$

Solución

Etapa 1 Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida

Etapa 2 Análisis de los datos:

Etapa 2.1 Si $P = (x_0, y_0)$ entonces

$$\begin{aligned}
P \in L' \cap L'' &\iff P \in L' \wedge P \in L'' \\
&\iff y_0 = 3x_0 - 1 \quad \wedge \quad y_0 = -x_0 + 5 \\
&\iff \left.\begin{array}{rcrcl} 3x_0 & - & 1 & = & y_0 \\ -x_0 & + & 5 & = & y_0 \end{array}\right| \\
&\iff 4x_0 = 6 \\
&\iff x_0 = \frac{3}{2} \text{ e } y_0 = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Luego, $P = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$. Además retornando a la Etapa 1, tenemos que

$$P \in L \iff \frac{7}{2} = \frac{3}{2}a + b \qquad \text{(ecuación 1)}$$

Etapa 2.2 Si $L''' : y = cx + d$ entonces

$$\begin{aligned}
Q \in L''' &\iff 1 = c + d \\
R \in L''' &\iff -1 = -4c + d \\
&\Downarrow \\
Q \in L''' \wedge R \in L''' &\iff \left.\begin{array}{rcrcr} c & + & d & = & 1 \\ -4c & + & d & = & -1 \end{array}\right| \\
&\iff 5c = 2 \\
&\iff c = \frac{2}{5} \wedge d = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Luego, $L''' : y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ y $L \parallel L''' \iff a = \frac{2}{5}$

Etapa 3 Sustituyendo en (ecuación 1) tenemos que $b = \frac{29}{10}$

Finalmente,

$L \quad : \quad y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$

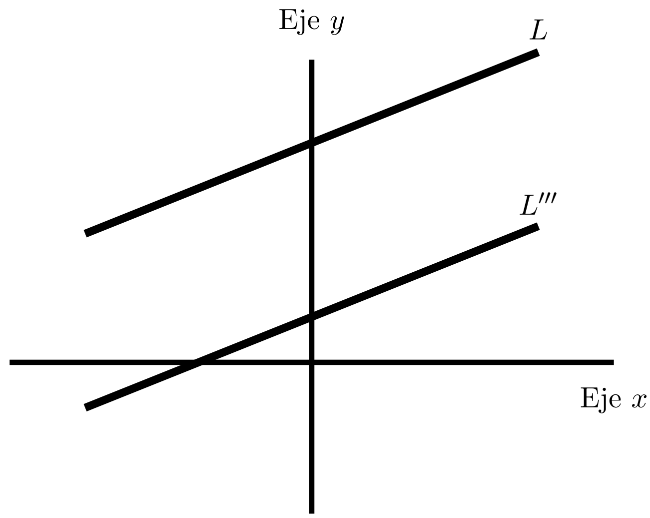


Figura 46

(2) **Rectas Perpendiculares**

Si graficamos las rectas $L : y = x + 1$ y $L' : y = -x + 1$

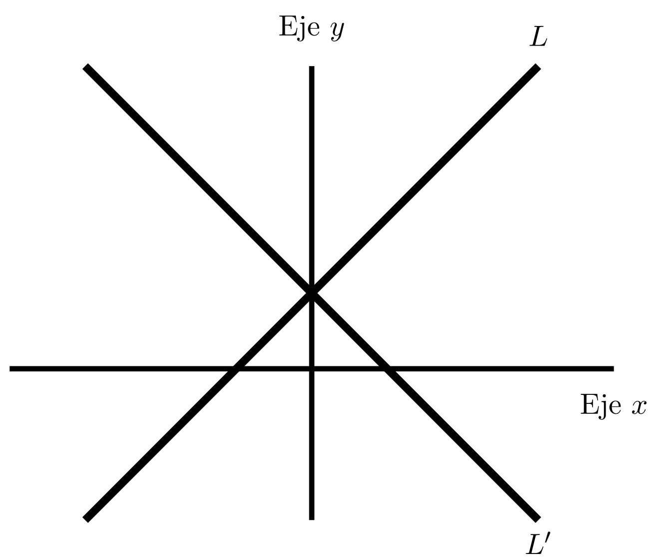


Figura 47

Observamos que ambas rectas son perpendiculares y que $a_L \cdot a_{L'} = 1 \cdot (-1) = -1$. Esta es la situación general para este tipo de comportamiento, así que por ahora lo definiremos a la espera de una posterior demostración.

Definición 5.3.3.

Si $L : y = a_L x + b_L$ y $L' : y = a_{L'} x + b_{L'}$ son dos rectas. Diremos que L es perpendicular a $L'(L \perp L')$ si $a_L \cdot a_{L'} = -1$

Ejemplo 5.3.4.

Determine la ecuación de la recta L que pasa por $P = (2,3)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x - 4$

Solución

Etapa 1 *Sea $L\ :\ y = ax + b$ la recta pedida*

Etapa 2 *Análisis de datos*

$$(2,3) \in L \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = 2a + b \qquad (\textit{ecuación 1})$$

$$\begin{aligned} L \perp (y = 2x - 4) \quad &\Longleftrightarrow \quad a \cdot 2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la (ecuación 1), tenemos que $b = 4$

Etapa 3 *Conclusión*

$$L\ :\ y = -\frac{1}{2}x + 4$$

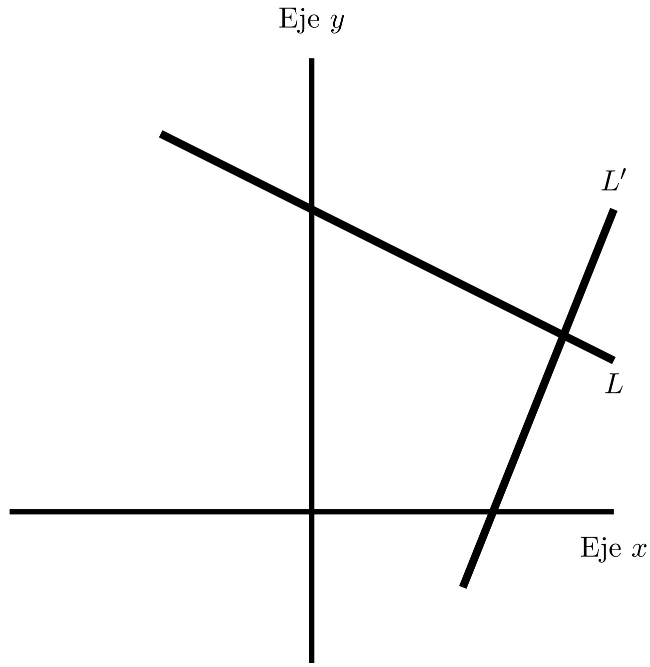


Figura 48

(3) **Distancia de un punto a una recta**

Etapa 1 Consideremos la situación geométrica:

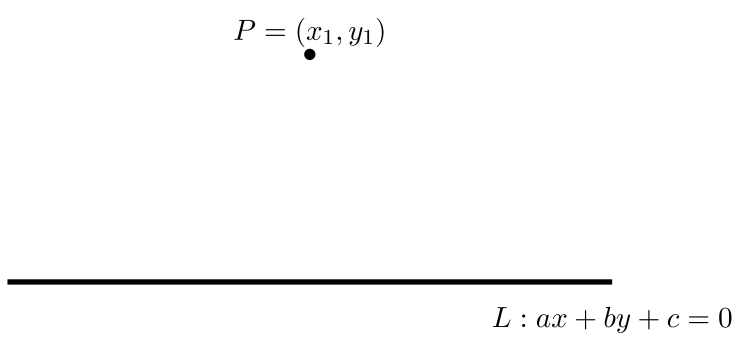


Figura 49

Etapa 2 Llamaremos distancia del punto P a la recta L a la distancia $d(P,L) = d(P,Q)$ como en la figura

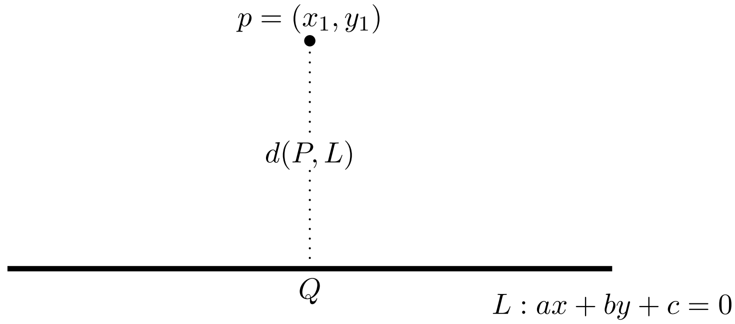


Figura 50

Etapa 3 Determinemos esa distancia aplicando el concepto de perpendicularidad de rectas.

Etapa 3.1 Determinamos la recta L' que pasa por P y es perpendicular a la recta L.

Como la pendiente de L es $m = -\dfrac{a}{b}$ entonces usando la ecuación punto pendiente (158) la ecuación de L' es

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad ay - bx + (bx_1 - ay_1) = 0$$

Etapa 3.2 Ahora intersectamos las rectas L y L', para ello debemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc|} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ ay & - & bx & + & (bx_1 - ay_{)} & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (*)$$

Las solución del sistema (*) es

$$Q = \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2 + b^2} \right)$$

Etapa 3.3 Finalmente calculamos la distancia de P a Q; $d(P,Q)$.

$$
\begin{aligned}
(d(P,Q))^2 &= \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2+b^2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2+b^2} - y_1\right)^2 \\
&= \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac - a^2x_1 - b^2x_1}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc - a^2y_1 - b^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-aby_1 - ac - a^2x_1}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 - bc - b^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a(by_1 + c + ax_1)}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(ax_1 + c + by_1)}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2(by_1 + c + ax_1)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_1 + c + by_1)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= (a^2+b^2)\frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= \frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

Definición 5.3.5.

La distancia de un punto $P = (x_1, y_1)$ a la recta $L\ :\ ax + by + c = 0$ es dada por

(159)
$$
d(P,L) = \sqrt{\frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{a^2+b^2}}
$$

5.4. Ejercicios Resueltos.

(1) Una compañía de arriendo de autos cobra una cantidad fija más una cantidad por kilómetro. Si el arriendo de un auto el lunes costó 70 dólares por recorrer 100 kilómetros y el jueves costó 120 dólares por recorrer 350 kilómetros. ¿ cuál es la función lineal que la compañía utiliza para cobrar sus cargos diarios.?

Solución

Etapa 1 Sea $L\ :\ y = ax + b$ la función lineal pedida, donde x representa los kilómetros e y el precio

Etapa 2 Evaluamos para determinar a y b

$$
\begin{aligned}
(100, 70) \in L \wedge (350, 120) \in L &\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 100x & + & b & = & 70 \\ 350x & + & b & = & 120 \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow 250x = 50 \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{50}{250} \\
&\Longleftrightarrow x = 0.2 \wedge b = 50
\end{aligned}
$$

Lego,

$$l(x) = 0.2x + 50$$

Así que la compañía cobra una cuota de 50 dólares de cargo fijo, más 0.2 dólares por kilómetro.

Etapa 3 Gráficamente la solución se ve como sigue:

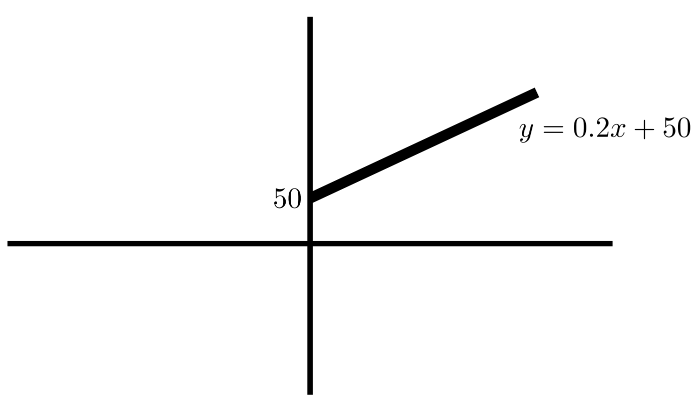


Figura 51

Supongamos que existe otra compañía cuya función de cobro es dada por la fórmula $y = 0.3x + 25$, es decir tiene un cobro fijo de 25 dólares y 0.3 dólares por kilómetro. ¿ Cuál de las dos empresas es más conveniente para usted.?

En este caso la situación geométrica es la siguiente:

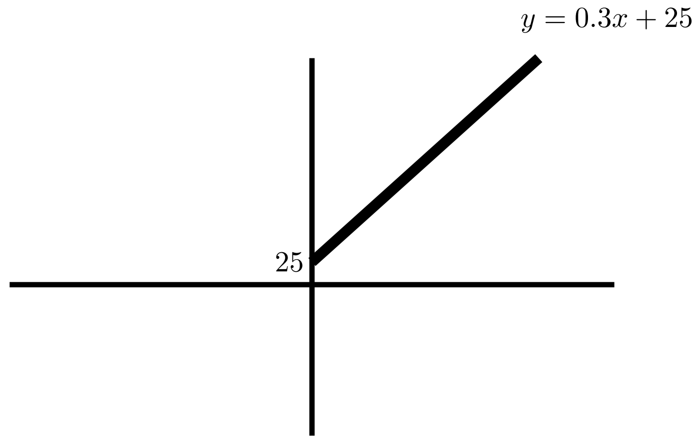


Figura 52

Comparando ambas situaciones tenemos

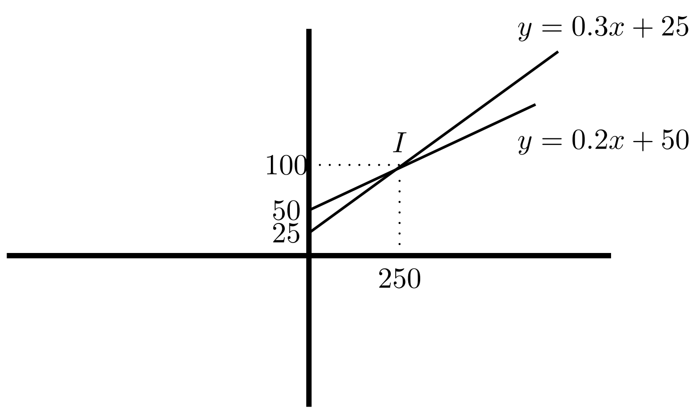


Figura 53

Como se ve en la figura el punto de intersección $I = (250, 100)$ el cual puede ser calculado vía un sistema de ecuaciones. La interpretación del punto de equilibrio es: **" Para viajes de menos de 250 kilómetros debe usarse la segunda compañía y para viajes de más de 250 kilómetros debe usarse la primera"**

5.5. Ejercicios Propuestos.

(1) Determina la ecuación general de la recta dados los siguientes datos

(a) $P = (1, 2)$ y $Q = (-2, 4)$

(b) $P = (0, 0)$ y $Q = (3, 3)$

(c) $P = (1, 2)$ y $a = 5$ (a es la pendiente)

(d) $P = (2, -3)$ y $a = -2$

(e) Intersecta al eje x en (4,0) y al eje y en (0,-2)

(2) Demuestre que los puntos son los vértices de la figura que se indica:

(a) $P = (-3, 1)$; $Q = (5, 3)$; $R = (3, 0)$;$S = (-5, -2)$ Paralelogramo

(b) $P = (6, 15)$; $Q = (11, 12)$; $R = (-1, -8)$;$S = (-6, -5)$ Rectángulo

(c) $P = (-3, 0)$; $Q = (3, 0)$; $R = (8, 0)$ Triángulo

(3) Determina la ecuación general de la recta dadas los siguientes condiciones

(a) $P = (1, 1)$ y es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$

(b) $P = (0, 4)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 5 = 0$

(c) Pasa por la intersección de las rectas $2x+7y+4 = 0$ y $4x-3y+5 = 0$ y es paralela a la recta $5x - 2y - 9 = 0$.

(d) Es paralela a eje x y pasa por $P = (7, 3)$

(4) Un bebé pesa 5 kilos al nacer y siete años después pesa 28 kilos. Suponga que el peso P en kilos esta relacionado linealmente con la edad t en años.

(a) Determine P en términos de t.

(b) ¿Cuál será el peso del joven cuando tenga la edad de 18 años?.

(c) ¿A qué edad pesará 82 kilos?.

(5) Una compañía de arriendo de autos cobra una cantidad fija por día más un adicional por kilómetros. Si al rentar un carro un día se paga 80 dólares por 200 kilómetros y otro día se pagó 117,5 dólares por 350 dólares. Determine la función lineal que rige el cobro diario de la compañía.

5.6. Función Cuadrática.

Definición 5.6.1.

Una función se llamará función cuadrática sobre $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, si existen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$q(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}) \tag{160}$$

Si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ entonces $q(x) = ax^2 + bx + c$, se llama función cuadrática.

Ejemplo 5.6.2.

(1) $l(x) = x^2$

(2) $q(x) = 2x^2 + 4x - 5$

(3) $l(x) = -x^2 + 1$

(4) $l(x) = x^2 + 3x - 6$

Observación 5.6.3.

(1) Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ es una función cuadrática entonces para determinar la función completamente basta con conocer el dominio $\mathbb{U}$, a, b y c

(2) Consideremos la "función cuadrática básica o más simple" $q(x) = x^2$

(a) Su gráfico como se ve fácilmente es definido por el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{U} \subseteq R\} \tag{161}$$

Su gráfico es de la forma:

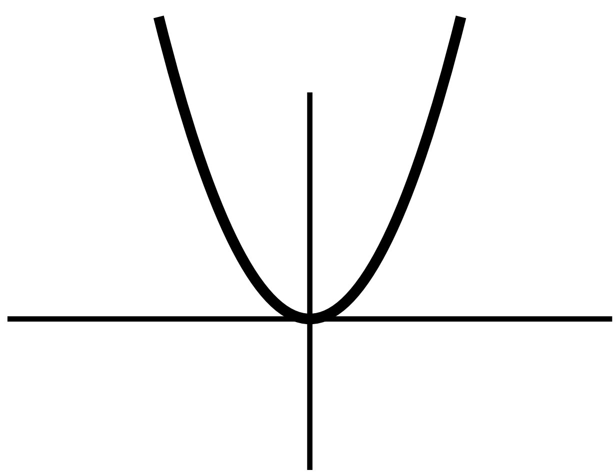


Figura 54

(b) Análogamente para $q(x) = -x^2$ tenemos que su gráfico es del tipo:

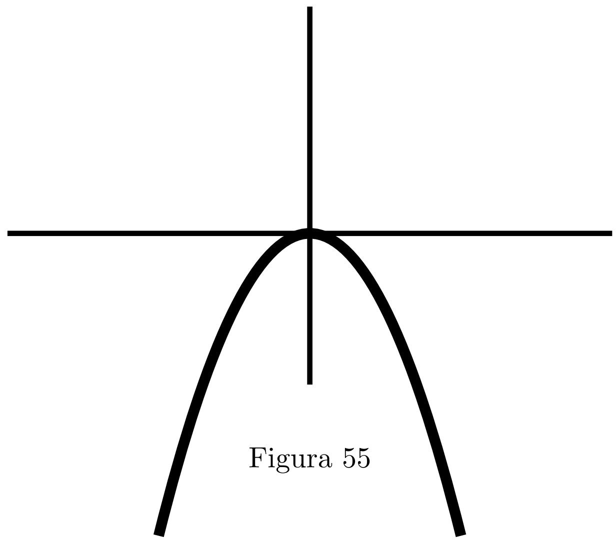


Figura 55

(c) De sus gráficos y de los cálculos directos sigue que:

$$q(-x) = q(x) \qquad \text{simetría respecto del eje y} \tag{162}$$

Caso 1: $a = 0$

En este caso $q(x) = bx + c$ es una función lineal, ya estudiada.

Caso 2: $a \neq 0$

En este caso podemos hacer lo siguiente

$$\begin{aligned}
q(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$q(x) = ax^2 + bx + c \iff q(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) \tag{163}$$

Observación 5.6.4.

(1) $q\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\Longrightarrow\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\in graf(q)$

(2) *Ahora, respecto de la imagen o recorrido de q tenemos que*

$$\begin{aligned}
y\in Img(q) &\iff y=ax^2+bx+c \quad (\textit{para algún } x\in\mathbb{R})\\
&\iff ax^2+bx+(c-y)=0\\
&\iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}\\
&\iff b^2-4a(c-y)\geq 0\\
&\iff b^2\geq 4a(c-y)\\
&\iff b^2\geq 4ac-4ay\\
&\iff 4ay\geq 4ac-b^2\\
&\iff ay\geq \frac{4ac-b^2}{4}
\end{aligned}$$

(a) *Si* $a>0$ *entonces* $y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *y* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es un mínimo y la parábola abre hacia arriba.*

(b) *Si* $a<0$ *entonces* $y\leq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *y* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es un máximo y la parábola abre hacia abajo.*

(3) *En particular, como*

$$ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

sigue que

(a) *Si* $b^2-4ac\geq 0$ *entonces la parábola intersecta al eje x en a lo más dos puntos a saber:*

(i) $b^2-4ac>0\Longrightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $b^2-4ac=0\Longrightarrow x=\dfrac{-b}{2a}$

(b) *Si* $b^2-4ac<0$ *entonces la parábola no intersecta al eje x.*

Definición 5.6.5.

Si $q(x)=ax^2+bx+c$ *es una función cuadrática entonces al punto* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *lo llamaremos el vértice de la parábola y a la recta* $x=-\dfrac{b}{2a}$ *la llamaremos eje de* *simetría de la parábola.*

(4) *Finalmente los gráficos posibles para una función cuadrática son:*

(i) *Caso :* $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) > 0$

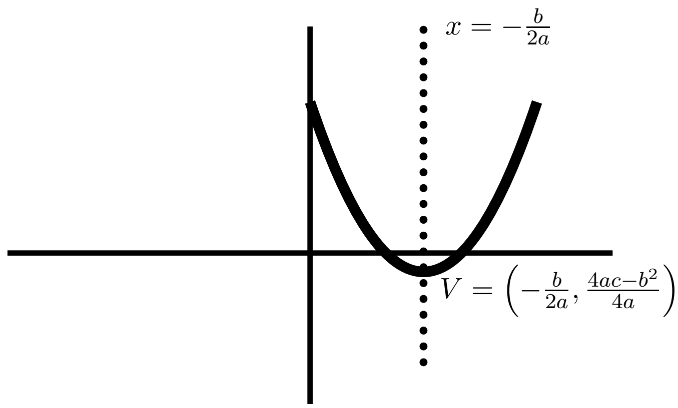


Figura 56

(ii) *Caso :* $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) = 0$

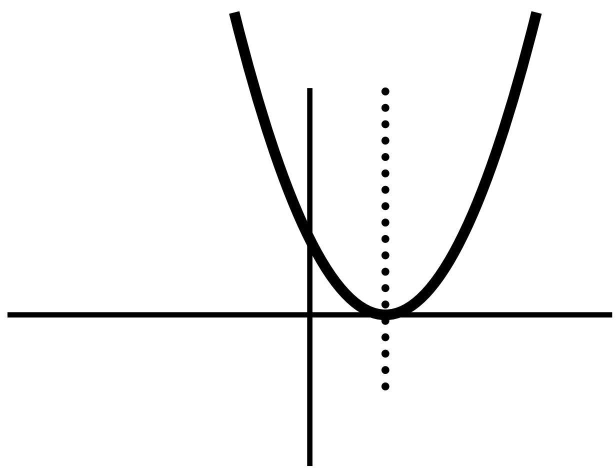


Figura 57

(iii) *Caso :* $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

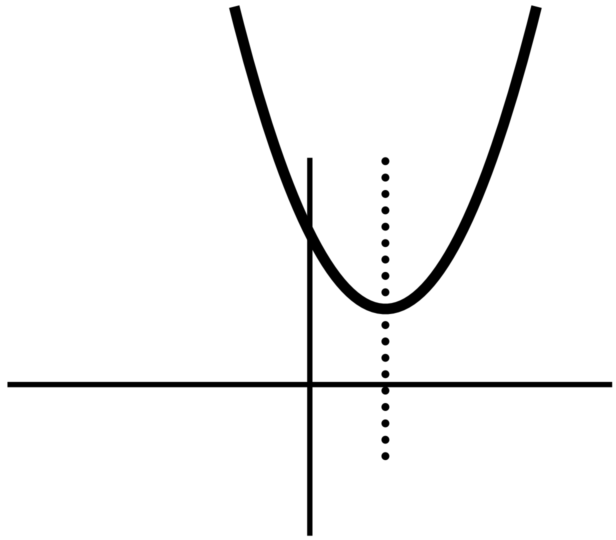


Figura 58

(i') *Caso :* $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) > 0$

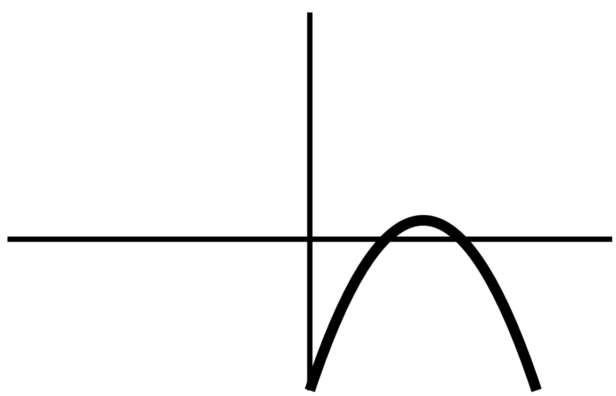


Figura 59

(ii') *Caso :* $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) = 0$

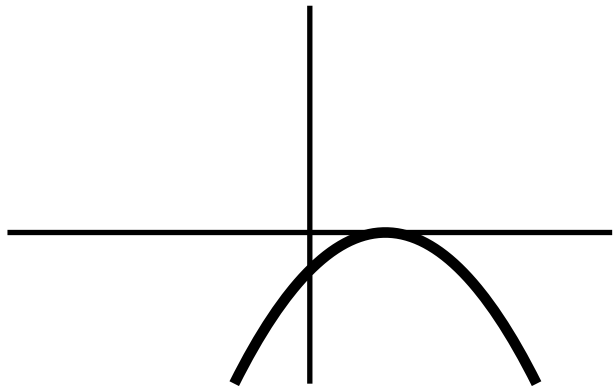


Figura 60

(iii') *Caso :* $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

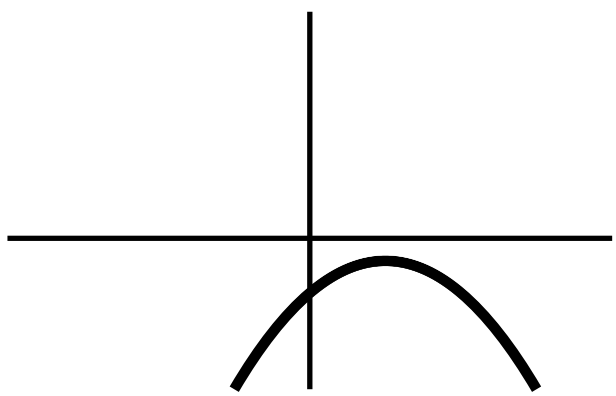


Figura 61

Ejemplo 5.6.6.

(1) *Sea* $q(x) = x^2 - 4x + 3$ *entonces*

(a) $a = 1$, *luego la parábola abre hacia arriba.*

(b) $b^2 - 4ac = 4 > 0$, *luego la parábola intersecta al eje x en dos puntos, a saber:*

$$P_1 = (\frac{4-2}{2}, 0) = (1,0) \quad \wedge \quad P_2 = (\frac{4+2}{2}, 0) = (3,0)$$

(c) *El vértice de la parábola es:* $V = \left(-\frac{-4}{2}, \frac{-4}{4}\right) = (2,-1)$

(d) *Así que su gráfico es del tipo:*

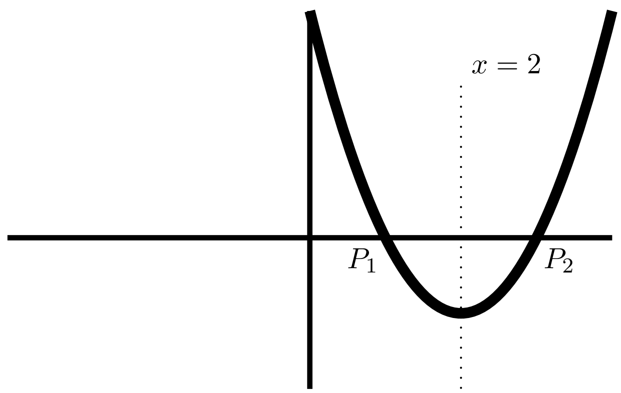


Figura 62

5.7. Relaciones Algebraicas en el Plano y Geometría Analítica.

Definición 5.7.1.

Llamaremos un **Lugar Geométrico**[1] *al conjunto de puntos del plano que satisface una condición geométrica.*

Ejemplo 5.7.2.

(1) **Círculo**

(a) *Determine y grafique el Lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado en el plano.*

Solución

[1]Toda curva de segundo grado puede ser considerada como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado foco y a una recta fija, llamada directriz están en una relación constante, llamada excentricidad.

Etapa 1 *Sea $O = (h, k)$ el punto fijo dado en el plano y llamemos C al lugar geométrico pedido.*

Etapa 2 *Traducimos el español a la matemática!!:*

- *Equidistar significa estar a la misma distancia, así que los elementos de O se encuentran todos a la distancia r del punto centro C*
- *Luego, $Q \in C \Longleftrightarrow d(Q, O) = r$*
- *Finalmente,*

$$C \;=\; \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, O) = r\} \tag{164}$$

Etapa 3 *Caracterizamos y graficamos el lugar geométrico C*

$$\begin{aligned} Q \in C &\Longleftrightarrow Q \in \mathbb{R}^2 \wedge d(Q, O) = r \\ &\Longleftrightarrow Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \\ &\Longleftrightarrow Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Etapa 4 *Su gráfico es el siguiente:*

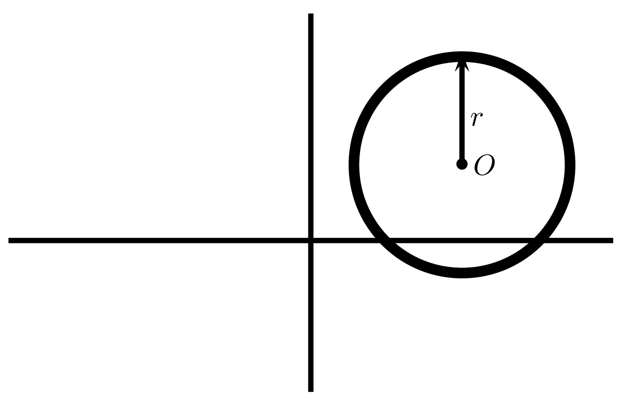


Figura 63

Definición 5.7.3.

El lugar geométrico definido encima se llama circulo de centro en $O = (h, k)$ y radio r. Y lo notaremos por su ecuación canónica:

$$C \;:\; (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{165}$$

(b) *Consideremos la ecuación* $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ *entonces podemos hacer lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+4x-6y-9=0 &\iff (x^2+4x)+(y^2-6y)+9=0\\
&\iff \left(x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)+\\
&\quad\ \left(y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)=-9\\
&\iff (x^2+4x+(2)^2-4)+(y^2-6y+(3)^2-9)=-9\\
&\iff (x+2)^2-4+(y-3)^2-9=-9\\
&\iff (x+2)^2+(y-3)^2=-9+13\\
&\iff (x+2)^2+(y-3)^2=4\\
&\iff (x-(-2))^2+(y-3))^2=4
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación representa a un círculo de centro $O=(-2,3)$ *y radio* $r^2=4 \iff r=\sqrt{4}=2$

Su diseño es de la forma:

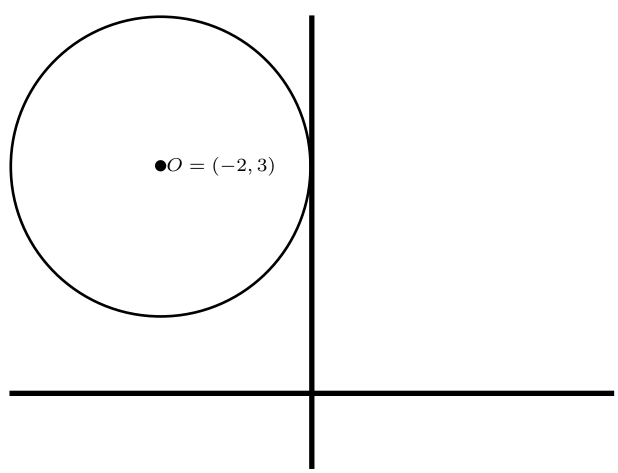


Figura 64

(c) *En general consideremos una ecuación del tipo,* $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *entonces*

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\iff (x^2 + ax) + (y^2 + by) = -c \\
&\iff x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c \\
&\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c \\
&\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *representa un círculo si*

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$ *y su radio es* $O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

5.8. Ejercicios Propuestos.

(a) *Escriba las ecuaciones canónica y general de los círculos. Además grafique cada círculo.*

(i) $O : (3, 5)$ *y* $r = 2$

(ii) $O : (-1, 1)$ *y* $r = 3$

(iii) $O : (0, 0)$ *y* $r = 1$

(iv) $O : (-3, -1)$ *y* $r = \sqrt{2}$

(v) $O : (2, -1)$ *y* $r = 2\sqrt{3}$

(vi) $O : (3, 3)$ *y* $r = 4$

(vii) $O : (0, -2)$ *y* $r = 3\sqrt{2}$

(b) *Determine el centro, el radio y grafique cada uno de los círculos:*

(i) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

(iii) $3x^2 + 3y^2 - 30x + 6y + 3 = 0$

(iv) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

(v) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 32y + 33 = 0$

(vi) $6x + 12y + 40 - 9x^2 - 9y^2 = 0$

(vii) $x^2 + y^2 = 0$

(c) *Determine la ecuación del círculo con centro en el origen y que pasa por el punto* $P = (1, \sqrt{3})$

(d) *Determine la ecuación del círculo que pasa por los puntos* $P = (1, 2)$, $Q = (4, 3)$ *y* $R = (2, -3)$

(e) *Determine la ecuación de la recta* L, *que es tangente al círculo de ecuación* $C : x^2 + y^2 = 25$, *en el punto* $P = (3, 4)$. *Grafique* C *y* L

(f) *Determine la ecuación del círculo que pasa por el punto* $P = (1, -1)$ *y su centro es el punto de intersección de las rectas,* $x + y - 1 = 0$ *y* $2x + 3y + 2 = 0$. *Grafique el círculo y las rectas.*

(2) Elipse

Determine y grafique el Lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 *y* F_2, *llamados focos es igual a una constante y esa constante es mayor que el largo del segmento* $\overline{F_1F_2}$

Solución

Etapa 1 *Sean* $F_1 = (-c, 0)$ *y* $F_2 = (c, 0)$ *los focos fijos y que* $\overline{F_1F_2} < 2a$ *y que el centro del lugar geométrico es en* $C = (0, 0)$ *y llamemos* E *al lugar geométrico pedido.*

Etapa 2 *Traducimos el español a la matemática!!:*

(i) $Q \in E \Longleftrightarrow d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$

(ii) *Así que,*

$$E \quad : \quad d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a \qquad (*)$$

(iii) *Ahora buscamos otra relación entre* $d(Q, F_1)$ *y* $d(Q, F_2)$

$$\left.\begin{array}{rcl} d(Q, F_1)^2 & = & (x + c)^2 + y^2 \\ d(Q, F_2)^2 & = & (x - c)^2 + y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{cl} \Longrightarrow & d(Q, F_1)^2 - d(Q, F_2)^2 = (x + c)^2 - (x - c)^2 \\ \Longleftrightarrow & d(Q, F_1)^2 - d(Q, F_2)^2 = 4xc \\ \Longleftrightarrow & (d(Q, F_1) - d(Q, F_2))(d(Q, F_1) + d(Q, F_2)) = 4xc \\ \Longleftrightarrow & (d(Q, F_1) - d(Q, F_2))2a = 4xc \\ \Longleftrightarrow & d(Q, F_1) - d(Q, F_2) = \dfrac{2xc}{a} \qquad (**) \end{array}$$

(iv) *Con* $(*)$ *y* $(**)$ *formamos un sistema de ecuaciones,*

$$\left.\begin{array}{rcl} d(Q, F_1) + d(Q, F_2) & = & 2a \\ d(Q, F_1) - d(Q, F_2) & = & \dfrac{2xc}{a} \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} d(Q, F_1) = a + \dfrac{cx}{a} & : \textit{sumando}, \\ d(Q, F_2) = a - \dfrac{cx}{a} & : \textit{restando}. \end{cases}$$

(v) *Sustituyendo en* $d(Q,F_1)^2$ *y* $d(Q,F_2)^2$ *tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2 &= (x+c)^2+y^2\\
&\Updownarrow\\
a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2} &= x^2+2cx+c^2+y^2\\
&\Updownarrow\\
a^4+c^2x^2 &= a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2\\
&\Updownarrow\\
a^2y^2-c^2x^2+a^2x^2 &= a^4-a^2c^2\\
&\Updownarrow\\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= (a^2-c^2)a^2
\end{aligned}$$

Como $a^2 > c^2$ *entonces* $(a^2-c^2) > 0$ *y como* $a^2-c^2 = (\sqrt{(a^2-c^2)})^2$ *entonces podemos llamar* $b^2 = a^2-c^2$ *y tenemos la ecuación*

(166) $$E \quad : \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Etapa 3 *Finalmente caracterizamos el lugar geométrico* E

$$Q \in E \iff Q \in \mathbb{R}^2 \wedge d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$$

(167) $$\iff Q=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Etapa 4 *Su gráfico es el siguiente:*

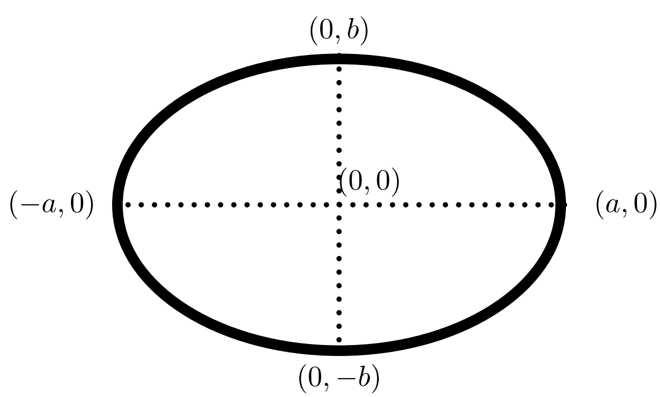


Figura 65

Definición 5.8.1.

El lugar geométrico definido encima se llama elipse de centro en $O=(0,0)$ *. Y lo notaremos por su ecuación canónica:*

(168) $$E \quad : \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observación 5.8.2.

(a) *Dada una elipse con centro en* $C = (h, k)$

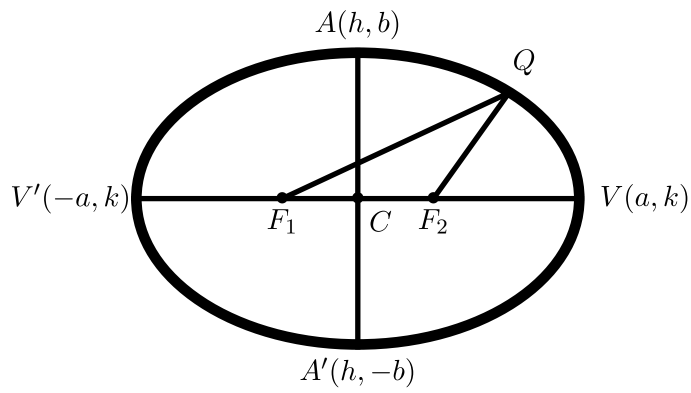


Figura 66

consideraremos los siguientes elementos básicos:

Centro de la elipse	:	*C=(h,k)*
Eje mayor (focal)	:	$\overline{VV'}$
Eje menor	:	$\overline{AA'}$
Focos	:	$F_1 = (-c, k);\ F_2 = (c, k)$ *y* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$d(V', V)$	:	$2a$
$d(A, A')$	:	$2b$
$d(C, F_1) = d(C, F_2)$	:	$c < a$
Excentricidad	:	$e = \dfrac{c}{a}$

(b) *De acuerdo a la posición del eje mayor tenemos dos ecuaciones canónicas:*

Definición 5.8.3.

(i) *La elipse con centro en* $C = (h, k)$ *y eje mayor paralelo al eje* x *tiene la ecuación canónica:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{169}$$

(ii) *La elipse con centro en* $C = (h, k)$ *y eje mayor paralelo al eje* y *tiene la ecuación canónica:*

(170) $$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Su gráfico es de la forma:

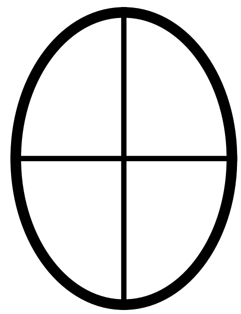


Figura 67

Ejemplo 5.8.4.

Grafique la cónica:

(171) $$2x^2+y^2-4x+2y+4=0$$

Solución

Etapa 1 *Completamos cuadrados*

$$\begin{aligned}
2x^2+y^2-4x+2y+4=0 &\iff 2x^2-4x+y^2+2y+4=0\\
&\iff 2(x^2-2x+1-1)+(y^2+2y+4-4)+4=0\\
&\iff 2(x-1)^2-2+(y+2)^2=0\\
&\iff 2(x-1)^2+(y+2)^2=2\\
&\iff (x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{2}=1
\end{aligned}$$

Luego la cónica es una elipse con centro en el punto $C=(1,-2)$.

Etapa 2 *Graficamos la elipse:*

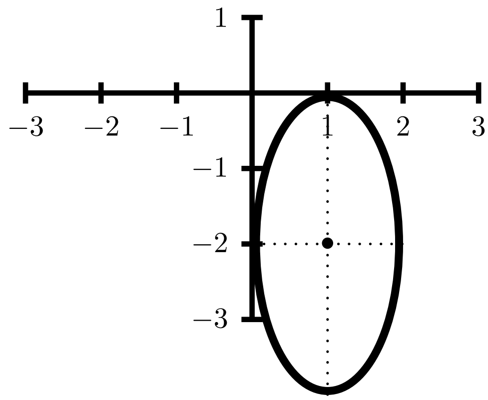


Figura 68

5.9. Ejercicios Propuestos.

(a) *Determine la ecuación canónica y general de las elipses y grafiquelas:*

(i) $V = (\pm 5, 0)$ *y* $A = (0, \pm 3)$

(ii) *Focos en* $(-2, 1)$ *y* $(4, 1)$ *y eje mayor 10*

(iii) *Focos en* $(-3, 0)$ *y* $(-3, 4)$ *y eje menor 6*

(iv) *Centro en* $(1, -2)$*, eje horizontal 8 y excentricidad* $e = \dfrac{3}{4}$

(v) *Focos en* $(-2, 2)$ *y* $(4, 2)$ *y excentricidad* $e = \dfrac{1}{3}$

(b) *Grafique y determine los elementos de las elipses:*

(i) $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

(ii) $12x^2 + y^2 - 36 = 0$

(iii) $x^2 + 8x + 9y^2 + 36y + 16 = 0$

(iv) $4x^2 - 24x + y^2 + 4y + 24 = 0$

(v) $9x^2 - 36x + 4y^2 - 24y + 36 = 0$

(c) *Demuestre que la recta tangente a la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *en* $P = (x_0, y_0)$ *tiene como ecuación:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{172}$$

(d) *La órbita de la tierra es un elipse, con el sol en uno de sus focos. La distancia máxima del planeta al sol es de 94.56 millones de millas y la mínima es de 91.45 millones de millas. ¿ Cuáles son los semiejes menor y mayor de la órbita terrestre y cuál es su excentricidad ?*

(3) **Hipérbola**

Se llama Hipérbola al lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos es igual a una constante y esa constante es menor que el largo del segmento $\overline{F_1F_2}$

- *Haciendo cálculos similares a los hechos en la elipse obtenemos para la Hipérbola dos ecuaciones:*

  Definición 5.9.1.

  (a) *La hipérbola con centro en $C = (h, k)$ y eje mayor paralelo al eje x tiene la ecuación canónica:*

(173)
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

  (b) *La hipérbola con centro en $C = (h, k)$ y eje mayor paralelo al eje y tiene la ecuación canónica:*

(174)
$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

- *Su gráfico es de la forma:*

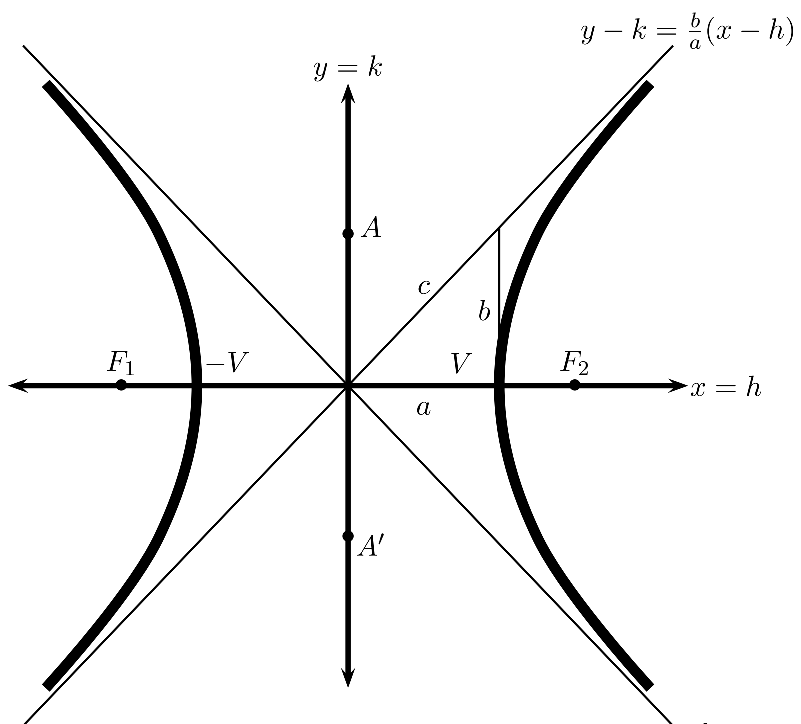


Figura 69

- *O bien de la forma:*

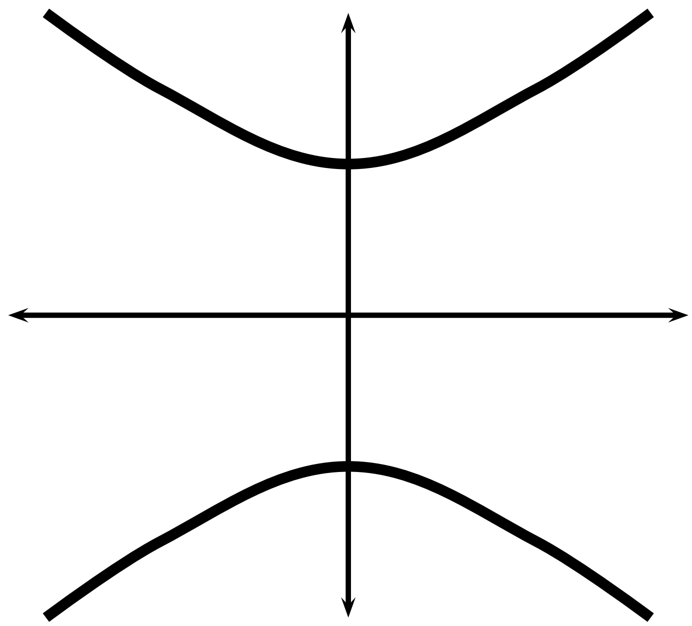


Figura 70

- *Los elementos básicos de una hipérbola son:*

Centro	:	$C = (h, k)$
Eje transversal	:	$\overline{VV'}$
Eje conjugado	:	$\overline{AA'}$
Focos	:	$F_1 = (-c, k); F_2 = (c, k)$ (*eje transversal paralelo eje x*)
$d(V, V')$	:	$2a$
$d(A, A')$	:	$2b$
Directrices	:	$y = \frac{a^2}{c};\ y = -\frac{a^2}{c}$
Excentricidad	:	$y = \frac{c}{a}$

Ejemplo 5.9.2.

Identifique la cónica:

(175) $$9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$$

Solución

Completamos cuadrados

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0 &\iff 9(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 36 \\ &\iff \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Luego la cónica es una hipérbola con centro en el punto $C = (2, 1)$.

5.10. Ejercicios Propuestos.

(a) *Determine la ecuación canónica y general de las hipérbolas y grafiquelas si:*

(i) *Focos en* $(\pm 4, 0)$ *y vértices en* $(\pm 1, 0)$

(ii) *Focos en* $(0, \pm 3)$ *y vértices en* $(0, \pm 2)$

(iii) *Vértices en* $(\pm 3, 0)$ *y excentricidad* $\frac{5}{3}$

(iv) *Vértices en* $(\pm 4, 0)$ *y pasa por el punto* $(8, 3)$

(v) *Centro* $(2, 2)$, *eje transverso horizontal de longitud 6 y excentricidad* 2

(vi) *Centro* $(-1, 3)$, *vértices en* $(-4, 3)$ *y* $(2, 3)$ *y focos en* $(-6, 3)$ *y* $(4, 3)$

(b) *Grafique y determine los elementos de las hipérbolas:*

(i) $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$
(ii) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$

(iii) $4y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 41 = 0$

(iv) $x^2 + 4x - 9y^2 + 54y - 113 = 0$
(v) $-4x^2 + 24x + 16y^2 + 64y - 36 = 0$

(c) *Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *en el punto* $P = (x_0, y_0)$ *es de la forma* $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

(4) Parábola

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a una recta fija (directriz) es igual a la distancia a un punto fijo (foco).

- *Partamos considerando el gráfico posible de la parábola de acuerdo a estas condiciones:*

(1) *Eje focal paralelo al eje* y

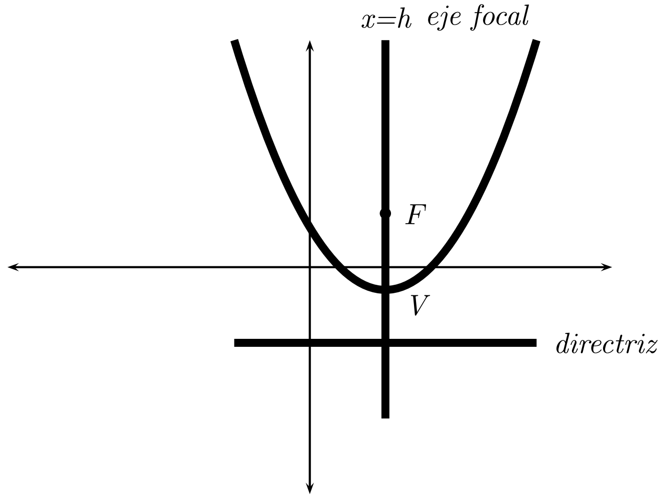


Figura 71

En este caso, la ecuación canónica de la parábola con vértice $V(h,k)$ y foco $F(h,p+k)$; $p>0$ y directriz $y=-p+k$ es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{176}$$

(2) *Eje focal paralelo al eje x*

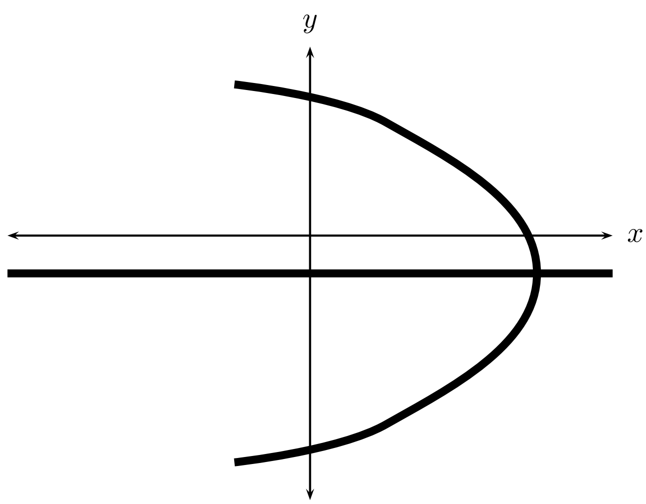


Figura 72

En este otro caso, la ecuación canónica de la parábola es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{177}$$

Ejemplo 5.10.1.

Determine la ecuación canónica y grafique la cónica:

(178) $$x^2 - 2x - 4y + 13 = 0$$

Solución

Etapa 1 Completamos el cuadrado posible:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 &\iff (x^2 - 2x) = 4y + 3 \\ &\iff \left(x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 4y + 3 \\ &\iff (x-1)^2 - 1 = 4y + 3 \\ &\iff (x-1)^2 = 4y + 4 \\ &\iff (x-1)^2 = 4(y+1) \end{aligned}$$

Luego la cónica es una parábola con vértice en el punto $V = (1, -1)$ y para calcular su foco hacemos lo siguiente:

$$4p = 4 \implies p = 1$$

Así que la parábola abre hacia arriba, pues su foco es $F = (1, 0)$

Etapa 2 Graficamos la parábola.

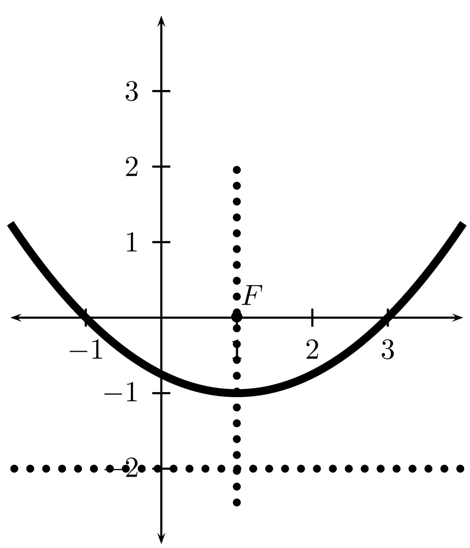


Figura 73

5.11. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine la ecuación canónica y general de las parábolas si:

(a) Vértice en $(0,0)$ y foco en $(3,0)$

(b) Vértice en $(2,3)$ y foco en $(2,1)$

(c) Vértice en $(-1,-1)$ y foco en $(-3,-1)$

(d) Foco en $(1,2)$ y directriz en $x=-1$

(e) Foco en $(-2,1)$ y directriz en $x=-4$

(f) Foco en $(0,-3)$ y directriz en $y=-2$

(2) Grafique y determine los elementos de las elipses:

(a) $y^2-12x=0$

(b) $x^2-4x-4y=0$

(c) $4x^2+4x+4y+13=0$

(d) $4y^2 12y+9x=0$

(3) Demuestre que el punto de la parábola $y^2=4px$ más cercano al foco es el vértice

(4) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=4px$ en el punto $P=(x_0,y_0)$ es

$$2px-y_oy+2px_0=0$$

CAPITULO 4

Preliminares sobre Grupos

Contenidos

- Introducción a los Grupos
- Homomorfismos de Grupos

1. Introducción

Definición 1.0.1.

Sea C un conjunto no vacio. $*$ se llamará una operación binaria si

$$\begin{array}{rcrcl} * & : & C \times C & \longmapsto & C \\ & & (c_1, c_2) & \longmapsto & c_1 * c_2 \end{array}$$

Es una función. "**Es decir la función $*$, privilegia la idea de combinar "dos elementos" de C para obtener un nuevo elemento de C, de aquí el nombre de binaria.**

Ejemplo 1.0.2.

(1) *Define la operación binaria:*

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longmapsto & \mathbb{Z} \\ & & (c_1, c_2) & \longmapsto & c_1 + c_2 \end{array}$$

Es decir la suma o adición usual de enteros es una operación binaria.

(2) *En general la adición de reales y el producto de reales constituyen ejemplos de operaciones binarias.*

(3) *Sea $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\}$, es decir los enteros positivos entonces define en $\mathbb{Z}^+$, la operación binaria:*

$$a * b = \begin{cases} \min(a, b) & si\ a \neq b \\ a & si\ a = b \end{cases}$$

Por ejemplo:

- *2*5=2*
- *3*3=3*
- *etc.*

(4) *En $\mathbb{Z}$ define la operación binaria:*

$$a * b = a + b + 12$$

Por ejemplo

- $2 * 3 = 17$
- $1 * 1 = 14$
- $5 * (-12) = 5$
- *En general,* $a * (-12) = a \ (\forall a; a \in \mathbb{Z})$

2. Introducción a los Grupos

Objetivos

(1) Que el Estudiante determine si un conjunto, junto con una operación binaria constituye un grupo.
(2) Que el Estudiante determine si una función definida entre grupos es un homorfismo.
(3) Que el Estudiante observe que la forma natural de clasificar estructuras se obtiene a través de isomorfismos.

Definición 2.0.3.

Sea G un conjunto no vacio y $*: G \times G \longmapsto G$ una operación binaria entonces diremos que $(G, *)$ posee estructura de grupo o es un grupo si $*$ satisface en G las siguientes propiedades:

(1) $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$, *es decir $*$ asocia los elementos de G*

(2) $(\exists e_G;\ e_G \in G)$*: tal que* $(\forall g;\ g \in G)$ *tenemos :*

$$g * e_G = g \qquad \wedge \qquad e_G * g = g$$

e_G lo llamaremos genericamente neutro de G

(3) *Para cada $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que:*

$$g * g' = g' * g = e_G$$

El elemento g' se llama genéricamente el inverso de g y es usual notarlo como:

$$g' = g^{-1}$$

Si además $*$ satisface la propiedad conmutativa en G, es decir:

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad (\forall g_1;\ g_1 \in G),\ (\forall g_2;\ g_2 \in G) \tag{179}$$

entonces $(G, *)$, se llama grupo Abeliano o Conmutativo.

Ejemplo 2.0.4.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:*

- $e_{\mathbb{Z}} = 0$
- $z^{-1} = -z$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:*

- $e_{\mathbb{Q}} = \dfrac{0}{1} = 0$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = -\frac{a}{b}$

(3) $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:*

- $e_{\mathbb{R}} = 0$

- $r^{-1} = -r$

(4) $(\mathbb{N}, +)$ *no es un grupo, pues* $0 \notin \mathbb{N}$, *y* $-1 \notin \mathbb{N}$, *es decir no tiene solución en general en* $\mathbb{N}$ *la ecuación.*

$$x + n = 0$$

(5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *no es un grupo, pues no tiene solución en general en* $\mathbb{Z}$ *la ecuación:*

$$a \cdot x = b$$

(6) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano, en este caso:*

- $e_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{1} = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

(7) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano, en este caso:*

- $e_{\mathbb{R}} = 1$

- $r^{-1} = \frac{1}{r}$

(8) *Sea* $G = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \dots, n)\}$, *si definimos en* $\mathbb{R}^n$ *la operación binaria:*

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

entonces $(\mathbb{R}^n, +)$ *es un grupo abeliano* $(\forall n;\ n \in \mathbb{N})$, *en este caso*

- $e_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, 0, \dots, 0)$, *es el neutro aditivo.*

- $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$

3. El grupo de matrices

Dado un conjunto de datos, un problema siempre interesante es como ordenarlos de una forma rápida y eficiente, es claro que la rapidez y eficiencia dependen de las necesidades que plantea la situación; en esta dirección tenemos por ejemplo la forma como se ordenan los departamentos en un edificio A de n-pisos. Una forma sería la siguiente: El departamento a_{ij}, esta en el piso i y ocupa la posición j en dicho piso; de esta forma $A = (a_{ij})$ es una buena representación del edificio, esto es:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{180}
$$

Definición 3.0.5.

A será llamada una Matriz de n-filas y m-columnas (orden $n \times m$) sobre $\mathbb{R}$ si A es de la forma de (180)*.*

Notación:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) &= \{ \text{ matrices de orden } n \times m \text{ sobre } \mathbb{R}\} \\
\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n) &= \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times n)
\end{aligned}
$$

3.1. Algunas Matrices Especiales.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$

(1) A será llamada Matriz fila si $n = 1$. Por ejemplo

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ fila de largo 5}
$$

(2) A será llamada Matriz columna si $m = 1$. Por ejemplo

$$
A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ columna de largo 5}
$$

(3) A será llamada Matriz nula si $a_{ij} = 0 \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n); (\forall j; 1 \leq j \leq m)$. Por ejemplo

$$
(0)_{(2\times 3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nula de orden } 2 \times 3
$$

(4) A será llamada Matriz cuadrada si $n = m$. Por ejemplo

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 18 \end{bmatrix} \qquad \text{cuadrada de orden 3}
$$

(5) A será llamada Matriz diagonal si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Por ejemplo

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \qquad \text{diagonal de orden 3}
$$

(6) A será llamada Matriz identidad si:

- $n = m$
- $a_{ij} = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$

Y se denota por I_n

Por ejemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{identidad de orden 3}$$

(7) A será llamada Matriz triangular superior si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i > j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular superior de orden 3}$$

(8) A será llamada Matriz triangular inferior si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular inferior de orden 3}$$

(9) A será llamada Matriz simétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{simétrica de orden 3}$$

(10) A será llamada Matriz antisimétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = -a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ -7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{antisimétrica de orden 3}$$

(11) A^t será llamada Matriz traspuesta de A si: $A^t = (a_{ji}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

En general A simétrica si $A = A^t$ y A antisimétrica si $A = -A^t$

(12) A será llamada Matriz de Fourier si:

- $n = m$
- $a_{ij} = \omega_n^{i \cdot j} \qquad 0 \leq i \leq (n-1); 0 \leq j \leq (n-1).$

Donde,

$$\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}$$

Por ejemplo,

- $F_2 = \begin{bmatrix} \omega_2^{0 \cdot 0} & \omega_2^{0 \cdot 1} \\ \omega_2^{1 \cdot 0} & \omega_2^{1 \cdot 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \omega_2 = \cos \frac{2\pi}{2} - i \sin \frac{2\pi}{2} = -1$

- $F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \end{bmatrix}, \qquad \omega_3 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}, \qquad \omega_4 = \cos \frac{2\pi}{4} - i \sin \frac{2\pi}{4} = -i$

(13) Más tarde volveremos por más matrices importantes en las aplicaciones....

3.2. Adición de matrices.

(1) Igualdad de Matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq m) \tag{181}$$

(2) Adición de matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos una operación interna "+", como sigue:

$$\begin{array}{rcccc} + & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array}$$

Tal que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{182}$$

Ejemplo 3.2.1. *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ *entonces*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ (a_{31} + b_{31}) & (a_{32} + b_{32}) & (a_{33} + b_{33}) & \dots & (a_{3n} + b_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & (a_{m3} + b_{m3}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) Propiedades de la adición de matrices

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Asociatividad)

En efecto;

Supongamos que

$$\begin{array}{c} A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)) \\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)) \\ C = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)) \end{array} \tag{183}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ((a_{ij})+(b_{ij}))+c_{ij} && (\text{ usamos } (183))\\
&= ((a_{ij}+b_{ij}))+c_{ij} && (\text{ usamos } (182))\\
&= ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) && (\text{ usamos } (182))\\
&= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) && (\text{ usamos la asociatividad de } \mathbb{K})\\
&= a_{ij}+((b_{ij})+(c_{ij})) && (\text{ usamos } (182))\\
&= A+(B+C) && (\text{ usamos } (182))
\end{aligned}$$

La importancia de la asociatividad estriba en que la operación inicialmente definida para dos sumados se extiende naturalmente a un número finito de sumandos.

(2) $(0)_{(n\times m)}$ es el elemento neutro aditivo en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$

En efecto;

Supongamos que $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m))$ entonces

$$\begin{aligned}
A+(0)_{(n\times m)} &= (a_{ij})+(0)\\
&= (a_{ij}+0)\\
&= (a_{ij}) && (\text{ usamos la propiedead del neutro de } \mathbb{R})\\
&= A
\end{aligned}$$

Así;

(184) $$A+(0)_{(n\times m)}=A=(0)_{(n\times m}+A \qquad (\forall A; A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m))$$

(3) Si $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$ entonces $-A=(-a_{ij})$ es el inverso aditivo

En efecto;

Supongamos que $A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$ entonces

$$\begin{aligned}
A+-A &= (a_{ij})+(-a_{ij})\\
&= (a_{ij}-a_{ij})\\
&= (0)_{(n\times m)}
\end{aligned}$$

(4) $A+B=B+A \qquad (\forall A; A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m); (\forall B; B=(b_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n\times m)$

En efecto;

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij}) \\ &= (b_{ij}+a_{ij}) \\ &= (b_{ij})+(a_{ij}) \\ &= B+A \end{aligned}$$

Corolario 3.2.2.

$A-B=A+(-B)$ *en* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(n\times m)$

Luego, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.2.3.

$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(n\times m),+)$ *es un grupo abeliano*

4. Grupo de polinomios

Definición 4.0.4. *(Una definición alternativa)*
Un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ en la "indeterminada x", es una suma formal infinita de la forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ son nulos, salvo para un número finito de valores de i.

Ejemplo 4.0.5.

(1) $p(x) = 2+3x+0x^2-5x^3+0x^4+0x^5+\cdots = 2+3x-5x^3$

(2) $q(x) = 0+x+0x^2+0x^3+0x^4+x^5+\cdots = x+x^5$

(3) $h(x) = 0+0x+0x^2+\cdots = 0$

(4) *En general, notaremos un polinomio de la forma,*

$$p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$$

Definición 4.0.6.

El conjunto de polinomios será notado como:

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \ (a_i\in\mathbb{R}),(n\in\mathbb{N}\cup\{0\}) \right\} \tag{185}$$

Observación 4.0.7.

Sea $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ entonces tenemos dos casos posibles:

Caso 1. *Existe al menos un i tal que $i \neq 0$ en tal caso $p(x) \neq 0$ y el mayor de los i no nulos es llamado el grado del polinomio y lo notamos $\partial p(x)$*

Caso 2. *Caso contrario todos los a_i son cero, en este caso decimos que $p(x)$ es el polinomio nulo y lo notamos $p(x) = 0$ y decimos que su grado no existe.*

Ejemplo 4.0.8.

(1) $p(x) = 2 + 3x - 5x^3 \Longrightarrow \partial p(x) = 3$

(2) $q(x) = x + x^5 \Longrightarrow \partial p(x) = 5$

(3) *En general,*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ \wedge \ a_n \neq 0 \Longrightarrow \partial p(x) = n$$

4.1. Adición de polinomios.

(1) Igualdad de polinomios

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ dos polinomios entonces

$$p(x) = q(x) \Longleftrightarrow n = m \wedge a_i = b_i \quad (\forall i; i = 1, 2, \dots, n)$$

(2) Adición de polinomios

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ en $\mathbb{R}[x]$ entonces definimos la operación binaria.

$$\begin{array}{cccccc} + & : & \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] & \longmapsto & \mathbb{R}[x] \\ & & (p(x), q(x)) & \longmapsto & p(x) + q(x) \end{array}$$

Tal que

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i \tag{186}$$

Ejemplo 4.1.1.

(a) Si $p(x) = 1 + 2x - 3x^5$ y $q(x) = -4 + 3x + 4x^2 + 7x^5 + 2x^7$ entonces

$$p(x) + q(x) = -3 + 5x + 4x^2 + 4x^5 + 2x^7$$

(b) Si $p(x) = 3 - x^3$ y $q(x) = x^3$ entonces $p(x) + q(x) = 3$

Observación 4.1.2.

En general por la forma de sumar dos polinomios tenemos en los ejemplos que:

$$\partial(p(x) + q(x)) \leq \max\{\partial p(x), \partial q(x)\}$$

(3) Propiedades de la adición de polinomios

(1) Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son elementos de $\mathbb{R}[x]$ entonces

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$$

En efecto

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ y $r(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ entonces

$$\begin{aligned}
[p(x) + q(x)] + r(x) &= \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right] + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} [a_i + b_i] x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} ([a_i + b_i] + c - i) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i + [b_i + c_i]) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} [b_i + c_i] x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left[\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right] \\
&= p(x) + [q(x) + r(x)]
\end{aligned}$$

Luego ”+” es asociativa en $\mathbb{R}[x]$

(2) $e_{\mathbb{R}[x]} = 0$ es el neutro en $\mathbb{R}[x]$, respecto de ”+”, pues

$$p(x) + 0 = p(x) \quad \wedge \quad 0 + p(x) = p(x) \qquad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}[x])$$

(3) Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ entonces $[p(x)]^{-1} = \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i = -p(x)$, es el inverso de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, respecto de ”+”, pues

$$\begin{aligned}
p(x) + [p(x)]^{-1} &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} [a_i - a_i] x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} 0 x^i \\
&= 0 \\
&= e_{\mathbb{R}[x]}
\end{aligned}$$

(4) Si $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_ix^i$ entonces

$$p(x)+q(x)=q(x)+p(x) \quad (\forall p(x); p(x)\in \mathbb{R}[x]), \quad (\forall q(x); q(x)\in \mathbb{R}[x])$$

Luego, hemos demostrado el teorema

Teorema 4.1.3.

$(\mathbb{R}[x],+)$ es un grupo abeliano.

Corolario 4.1.4.

Si definimos $\mathbb{R}_n[x]=\{p(x)\in\mathbb{R}[x] \mid \ \partial p(x)\leq n\}\cup\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$ entonces $(\mathbb{R}_n[x],+)$ es un grupo abeliano $(\forall n;\ n\in\mathbb{N})$. Observe que $\mathbb{R}_n[x]$ es el conjunto de todos los polinomios hasta grado n unidos con el polinomio nulo.

5. Un ejemplo de grupo no conmutativo

Consideremos un conjunto A, para fijar ideas, con tres elememtos, quizás los vértices de un triágulo, o tres personas distintas sentadas en una mesa o mejor;

$$A=\{1,2,3\}$$

Define a partir del conjunto A el nuevo conjunto:

$$S_3(A)=\{\varphi : A\longmapsto A \mid \ \varphi \text{ es una función biyectiva}\} \tag{187}$$

Problema 1. ¿ Quién es $S_3(A)$?

Veamos:

- Sabemos que $\varphi\in S_3(A) \Longleftrightarrow \varphi$ inyectiva y sobreyectiva. Así que para cada uno de los elementos de $S_3(A)$ podemos adoptar la siguiente notación:

$$\varphi_0 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_1 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_2 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_3 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_4 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_5 \ : \ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

Son las únicas!!!. Así que

$$S_3(A)=\{1_{S_3(A)},\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$$

- Define en $S_3(A)$, la operación binaria composición de funciones:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & : & S_3(A) & \longmapsto & S_3(A) \\ & & (\varphi_i, \varphi_j) & \longmapsto & (\varphi_i \circ \varphi_j) \end{array}$$

- $(S_3(A), \circ)$ es un grupo no abeliano.

  En efecto

  (i) Aprendiendo a operar:

  $$(\varphi_2 \circ \varphi_3): \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \varphi_5$$

  Trabaja por definición, es decir lees así:

  En φ_3 el "1 va al 2" y en φ_2 "2 va al 2", luego, "1 va al 2".

  En φ_3 el "2 va al 1" y en φ_2 "1 va al 3", luego, "2 va al 3".

  En φ_3 el "3 va al 3" y en φ_2 "3 va al 1", luego, "3 va al 1".

  (ii) De acuerdo a esta forma de operar, tenemos que en general:

  $$\varphi_0 \circ \varphi_i = \varphi_i \quad \wedge \quad \varphi_i \circ \varphi_0 = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

  Luego, $\varphi_0 = 1_{S_3(A)}$ es el neutro en $S_3(A)$

  (iii) Buscando los inversos:

  - $(\varphi_1)^{-1} = \varphi_1$
  - $(\varphi_2)^{-1} = \varphi_2$
  - $(\varphi_3)^{-1} = \varphi_3$
  - $(\varphi_4)^{-1} = \varphi_5$
  - $(\varphi_5)^{-1} = \varphi_4$

  (iv) $\varphi_3 \circ \varphi_2 = \varphi_4 \neq \varphi_2 \circ \varphi_3 = \varphi_5$

  Luego, $(S_3(A), \circ)$, es un grupo no conmutativo (o no abeliano).

6. Homomorfismos de grupos

Motivacion

Consideremos para fijar ideas los conjuntos: $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2)$, $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^2$ (en esta dirección no aporta mayor información el hecho de tomar "n" elementos en vez de 2) entonces podemos hacer las siguintes observaciones y preguntas:

(1) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2), +)$, $(\mathbb{R}_1[x], +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ son grupos abelianos, cada uno con su operación binaria correspondiente.

(2) ¿ Es diferente sustantivamente el arreglo de dos datos en forma de; columna o de fila o de par ordenado ?
En esta dirección tenemos lo siguiente:

- Podemos colocar entre estos conjuntos biyecciones naturales, a saber:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2) & \stackrel{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{R}_1[x] \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix} & \longmapsto & a_{11}+a_{12}x \end{array} \tag{188}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[x] & \stackrel{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2) \\ a_{11}+a_{12}x & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix} \end{array} \tag{189}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[x] & \stackrel{\phi}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ a_0+a_1x & \longmapsto & (a_0,a_1) \end{array} \tag{190}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{\phi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{R}_1[x] \\ (a,b) & \longmapsto & a+bx \end{array} \tag{191}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2) & \stackrel{\psi}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{11},a_{12}) \end{array} \tag{192}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{\psi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2) \\ (a_{11},a_{12}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix} \end{array} \tag{193}$$

- Por ejemplo, la función φ satisface la siguiente propiedad:

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \varphi(A+B) & = & \varphi\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\end{pmatrix}\right] \\ & = & \varphi\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\end{pmatrix} \\ & = & a_{11}+b_{11}+(a_{12}+b_{12})x \\ & = & a_{11}+a_{11}x+b_{11}+b_{12}x \\ & = & \varphi(A)+\varphi(B) \end{array}$$

Observen que $A+B$ representa la suma de matrices fila de orden (1×2) y $\varphi(A)+\varphi(B)$, representa la suma de polinomios hasta de grado 1.

Se puede comprobar directamente que las otras funciones satisfacen una propiedad similar en su contexto, así que vamos a archivar esta propiedad en una definición.

Definición 6.0.5.

Sean $(G,*)$ y $(G',\star)$ dos grupos y $h: G\longmapsto G'$ una función. Diremos que h es un homomorfismo de grupos si satisface la siguiente propiedad.

$$h(u*v)=h(u)\star h(v)\quad (\forall u; u\in G), (\forall v; v\in G)$$

Ejemplo 6.0.6.

(1) (188), (189), (190), (191), (192), (193), *son homomorfismos de grupo.*

(2) *Define* $h : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que* $h(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$ *entonces* h *es un homomorfismo de grupos*

En efecto

Sea $u \in \mathbb{R}^2$ *y* $v \in \mathbb{R}^2$*, p.d.q.* $h(u + v) = h(u) + h(v)$

$$\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{R}^2 & \Longleftrightarrow & u = (x_1, y_1) \\ v \in \mathbb{R}^2 & \Longleftrightarrow & u = (x_2, y_2) \\ & \Downarrow & \\ u + v & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} h(u + v) &= h(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 3x_1 + 3x_2) - y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + 2y_1, 3x_1 - y_1) + (x_2 + 2y_2, 3x_2 - y_2) \\ &= h(x_1, y_1) + h(x_2, y_2) \\ &= h(u) + h(v) \end{aligned}$$

(3) *Sea* $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n) \longmapsto \mathbb{R}$ *tal que para* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$*,* $h(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *entonces* h *es un homomorfismo de grupos.*

En efecto

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$ *y* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$*. p.d.q.* $h(A + B) = h(A) + h(B)$

$$\begin{aligned} h(A + B) &= h(a_{ij} + b_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= h(A) + h(B) \end{aligned}$$

(4) *Sea* $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ *tal que para* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$*,*

$$h(p(x)) = a_1 - a_2x + a_0x^2$$

En efecto

Sea $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$*.*
p.d.q. $h(p(x) + q(x)) = h(p(x)) + h(q(x))$

$$\begin{aligned}
h(p(x)+q(x)) &= h(a_0+a_1x+a_2x^2+b_0+b_1x+b_2x^2)\\
&= h(a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)\\
&= (a_1+b_1)-(a_2+b_2)x+(a_0+b_0)x^2\\
&= a_1+b_1-a_2x-b_2x+a_0x^2+b_0x^2\\
&= a_1-a_2x+a_0x^2+b_1-b_2x+b_0x^2\\
&= h(p(x))+h(q(x))
\end{aligned}$$

Definición 6.0.7.

Si $(G,*)$ *y* $(G',\star)$ *son dos grupos entonces notaremos*

(194) $$Hom(G,G')=\{h: G\longmapsto G' \mid h \text{ homomorfismo}\}$$

Lema 6.0.8. *(Una condición necesaria)*

(1) *Si* $h\in Hom(G,G')$ *entonces* $h(e_G)=e_{G'}$

En efecto

$$\begin{array}{lcll}
h(e_G) & = & h(e_G*e_G) & (\textit{ propiedad del neutro})\\
 & = & h(e_G)\star h(e_G) & (h\in Hom(G,G'))\\
 & \Downarrow & & \\
h(e_G)\star(h(e_G))^{-1} & = & h(e_G) & \\
 & \Downarrow & & \\
e_{G'} & = & h(e_G) &
\end{array}$$

(2) *Si* $h\in Hom(G,G')$ *entonces* $(h(g))^{-1}=h(g^{-1})$

En efecto

$$\begin{array}{lcl}
e_{G'} & = & h(e_G)\\
 & = & h(g*g^{-1})\\
 & = & h(g)\star h(g^{-1})\\
 & \Downarrow & \\
e_{G'} & = & h(g)\star h(g^{-1})\\
 & \Downarrow & \\
(h(g))^{-1} & = & h(g^{-1})
\end{array}$$

Definición 6.0.9.

Sea $h\in Hom(G,G')$ *entonces*

(1) $ker(h)=\{g\in G\mid h(g)=e_{G'}\}$ *se llama el núcleo del homomorfismo* h

(2) $Img(h)=\{h(g)\in G'\mid g\in G\}$ *se llama la imagen del homomorfismo* h

Observación 6.0.10. *(caracterizando la inyectividad)*

(1) *De* (6.0.8) *sigue que* $ker(h) \neq \emptyset$

(2) *Sea* $h \in Hom(G, G')$ *y supongamos que* h *es inyectiva entonces*

$$\begin{array}{lcll} g \in ker(h) & \Longleftrightarrow & h(g) = e_{G'} & \\ & \Downarrow & & \\ h(g) & = & h(e_G) & (\ ver\ (6.0.8)) \\ & \Downarrow & & \\ g & = & e_G & (h\ inyectiva\ ) \\ & \Downarrow & & \\ ker(h) & = & \{e_G\} & \end{array}$$

(3) *Reciprocamente, supongamos que* $ker(h) = \{e_G\}$ *entonces*

$$\begin{array}{lcl} h(g_1) = h(g_2) & \Longrightarrow & h(g_1) \star (h(g_2))^{-1} = e_{G'} \\ & \Downarrow & \\ h(g_1) \star h((g_2)^{-1}) & = & e_{G'} \\ & \Downarrow & \\ h(g_1 * (g_2)^{-1}) & = & e_{G'} \\ & \Downarrow & \\ g_1 * (g_2)^{-1} \in ker(h) & & \\ & \Downarrow & \\ g_1 * (g_2)^{-1} & = & e_{G'} \\ & \Downarrow & \\ g_1 & = & g_2 \end{array}$$

Luego, hemos demostrado el siguiente importante teorema:

Teorema 6.0.11.

Sea $h \in Hom(G, G')$ *entonces*

$$h\ inyectivo\ \Longleftrightarrow ker(h) = \{e_G\}$$

Ejemplo 6.0.12.

Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ *tal que* $h(a, b, c) = a + bx + cx^2$ *entonces*

- h *es un homomorfismo de grupos*

  En efecto

  Sean $u = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ *y* $v = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ *entonces*

$$\begin{aligned} h(u + v) &= h(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\ &= a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 \\ &= (a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) \\ &= h(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2) \\ &= h(u) + h(v) \end{aligned}$$

- h *es inyectivo*

Sea $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*, de acuerdo al teorema debemos mostrar que*

$ker(h) = \{(0, 0, 0)\}$*, así que*

$$\begin{array}{rcl} u \in ker(h) & \Longleftrightarrow & u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = e_{\mathbb{R}_2[x]} \\ & \Longleftrightarrow & u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(a, b, c) = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longleftrightarrow & u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a + bx + cx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longleftrightarrow & u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge (a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0) \\ & \Longleftrightarrow & u = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \\ & & \\ & \Longleftrightarrow & ker(h) = \{(0, 0, 0)\} \end{array}$$

Luego, h *es inyectivo*

Observación 6.0.13.

Recordemos que si f *es una función de* A *en* B *entonces* f *sobreyectiva si* $Img(f) = B$ *entonces ahora podemos intentar responder la pregunta planteada en 6.*

Definición 6.0.14.

Sea $h \in Hom(G, G')$ *entonces* h *se llama un isomorfismo de grupos si* h *es biyectiva, es decir* h *es inyectiva y sobreyectiva.*

En tal caso diremos que G *y* G' *son isomorfos y notaremos* $G \cong G'$

Ejemplo 6.0.15.

(1) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(1 \times n)$

En efecto

Basta definir el isomorfismo canónico:

$$\begin{array}{rccc} h & : & R^n & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(1 \times n) \\ & & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}_n[x]$

En efecto

Basta definir el isomorfismo canónico:

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^{n+1} & \longmapsto & \mathbb{R}_n[x] \\ & & (a_0, a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \end{array}$$

(3) *Luego, como grupos tenemos* $(\forall n; n \in \mathbb{N})$*:*

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(1 \times n) \cong \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

Definición 6.0.16.

Al conjunto de isomorfismos entre los grupos G y G', lo notaremos com:

$$Iso(G; G') = \{h \in Hom(G, G') \mid h \text{ isomorfismo } \}$$

6.1. Ejercicios resueltos.

(1) Si definimos en $\mathbb{Z}$ la siguiente operación binaria:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \stackrel{*}{\longmapsto} & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & a*b \end{array}$$

tal que $a*b = a+b+n$, donde n es un entero fijo; entonces el par $(\mathbb{Z},*)$ es un grupo abeliano.

En efecto

(i) P.d.q. $(\mathbb{Z},*)$ es una estructura cerrada

En efecto

Como $(\mathbb{Z},+)$ es cerrada ($+$ la adición usual de enteros) entonces

$$a*b = a+b+n \in \mathbb{Z} \quad (\forall a; a\in\mathbb{Z})(\forall b; b\in\mathbb{Z})$$

(ii) P.d.q. $(\mathbb{Z},*)$ es una estructura asociativa

En efecto

$$\begin{array}{rcll} (a*b)*c & = & (a*b)+c+n & \\ & = & (a+b+n)+c+n & \text{como } (\mathbb{Z},+) \text{ es asociativo} \\ & = & a+(b+n+c)+n & \text{como } (\mathbb{Z},+) \text{ es conmutativo} \\ & = & a+(b+c+n)+n & \\ & = & a+(b*c)+n & \\ & = & a*(b*c) & \end{array}$$

(iii) P.d.q. en $(\mathbb{Z},*)$ existe elemento neutro.

En efecto

Debemos resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación $a*e=a$ $(\forall a; a\in\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{rcl} a*e=a & \Longleftrightarrow & a+e+n=a \\ & \Longleftrightarrow & e=-n \end{array}$$

Así, ahora podemos comprobar directamente que $e=-n$ es el elemento neutro respecto de la operación $*$:

Es decir;

$$a*(-n) = a+(-n)+n = a \wedge -n*a = -n+a+n = a \qquad (\forall a; a\in\mathbb{Z})$$

(iv) P.d.q. en $(\mathbb{Z},*)$ cada elemento admite inverso.

En efecto

Para cada $a\in\mathbb{Z}$, debemos resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación $a*a' = -n$ $(\forall a; a\in\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} a * a' = e &\iff a + a' + n = -n \\ &\iff a' = -a - 2n \end{aligned}$$

Así, ahora podemos comprobar directamente que

$a^{-1} = -a - 2n$ es el elemento inverso de a en $\mathbb{Z}$ respecto de la operación $*$:

Es decir;

$$a * a^{-1} = a + (-a - 2n) + n = -n \wedge a^{-1} * a = -a - 2n + a + n = -n \quad (a \in \mathbb{Z})$$

(v) Finalmente, $(\mathbb{Z}, *)$, es un grupo conmutativo o Abeliano

En efecto

$$\begin{aligned} a * b &= a + b + n \\ &= b + a + n \\ &= b * a \end{aligned}$$

Observación 6.1.1.

Observamos que

(1) *Si* $n = 0$ *entonces* $(\mathbb{Z}, *) = (\mathbb{Z}, +)$

(2) *Si por ejemplo* $n = -5$ *entonces*
   (i) $a * b = a + b - 5$

   (ii) $e = 5$

   (iii) $a^{-1} = -a + 10$

   (iv) *Si definimos* $x^2 = x * x$ *entonces podemos resolver ecuaciones, como por ejemplo;*

(195) $$x^2 + 2 * x - 1 = 0$$

Solución

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2 * x - 1 \\ &= x + x - 5 + 2 + x - 5 - 1 \\ &= 3x - 9 \end{aligned}$$

Luego, $x = 3$

(3) *En general la operación* $*$ *transforma un grupo en otro grupo, o bien traslada la estructura en* $-n$ *unidades.*

(2) Determine la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1000)$; tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i & : i \leq j \\ 0 & : i > j \end{cases} \tag{196}$$

Además calcule la "traza,"(en símbolos tr) de la matriz A donde:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} \tag{197}$$

Solución

(i) De la definición hecha en (196) tenemos que, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_{23} &= 2 \qquad \text{pues la "fila 2 es menor que la columna 3"} \\ a_{32} &= 0 \qquad \text{pues la "fila 3 es mayor que la columna 2"} \end{aligned}$$

Despues de lo anterior tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{11000} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{21000} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{31000} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10001} & a_{10002} & a_{10003} & \dots & a_{10001000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1000 \end{pmatrix}$$

(ii) Finalmente,

$$\begin{aligned} tr(A) &= \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{1000} i \\ &= \frac{1000 \cdot 1001}{2} \\ &= 500500 \end{aligned}$$

(3) En el conjunto de matrices $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, considera el siguiente subconjunto:

$$S = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\} \tag{198}$$

Donde A^t, es la matriz traspuesta de la matriz A. En símbolos.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{199}$$

Así por ejemplo:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
representan dos ejemplos de elementos de S.

En general para entender al conjunto S, hacemos lo de siempre:

$$
\begin{aligned}
A \in S &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{|c} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{21} = a_{12} \\ a_{22} = a_{22} \\ \hline \end{array} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{12} = a_{21} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(i) Observen que si $A = (a_{ij}) \in S$ y $B = (b_{ij}) \in S$ entonces
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
Luego, $A + B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Ahora
$$
\begin{aligned}
(A+B)^t &= (a_{ij} + b_{ij})^t \\
&= (a_{ji} + b_{ji}) \\
&= A^t + B^t
\end{aligned}
$$
Conclusión $A + B \in S$

Además, es claro que; $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ y si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S$ entonces $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix} \in S$.

Así que $(S, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Observen tambien que si $A \in S$ entonces
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}}_{\in S}$$

(4) Consideren la función, $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, tal que

(200) $$T(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y - z, z)$$

(i) Demostremos que T es un homomorfismo de grupos.

p.d.q. (por demostrar que)

(201) $$T(u+v) = T(u) + T(v) \text{ para cada } u \text{ y } v \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Sean $u \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathbb{R}^3 & \Longleftrightarrow & u = (u_1, u_2, u_3) \\ v \in \mathbb{R}^3 & \Longleftrightarrow & v = (v_1, v_2, v_3) \end{array}$$

Luego,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Así que:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)) \\ &= ((u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3), (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3), \\ &\quad , (u_3 + v_3)) \\ &= (u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2 + u_3 + v_3, u_1 + v_1 - u_2 - v_2 - u_3 - v_3, u_3 + v_3) \\ &= (u_1 + 2u_2 + u_3, u_1 - u_2 - u_3, u_3) + (v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 - v_2 - v_3, v_3) \\ &= T(u_1, u_2, u_3) + T(v_1, v_2 v_3) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Así que hemos verificado (201) y entonces T es un homomorfismo de grupos.

(ii) Calculemos el "Núcleo de (T)" o *kernel* de T o $ker(T)$.

$$\begin{aligned} u \in ker(T) &\Longleftrightarrow u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \wedge T((u_1, u_2, u_3)) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \wedge (u_1 + 2u_2 + u_3, u_1 - u_2 - u_3, u_3) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \wedge \begin{array}{ccccccc|} u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 0 \\ u_1 & - & u_2 & - & u_3 & = & 0 \\ & & & & u_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \\ &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \wedge \left[u_3 = 0 \wedge \begin{array}{ccccc|} u_1 & + & 2u_2 & = & 0 \\ u_1 & - & u_2 & = & 0 \\ \hline \end{array} \right] \\ &\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \wedge u_3 = u_1 = u_2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow ker(T) = \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

(iii) Determinemos la imagen de T.

$$\begin{aligned}
v\in Img(T) &\iff v\in\mathbb{R}^3\wedge(\exists u;u\in\mathbb{R}^3):T(u)=v\\
&\iff v=(v_1,v_2,v_3)\wedge T(u_1,u_2,u_3)=(v_1,v_2,v_3)\\
&\iff v=(v_1,v_2,v_3)\wedge \left.\begin{array}{ccccccc} u_1&+&2u_2&+&u_3&=&v_1\\ u_1&-&u_2&-&u_3&=&v_2\\ &&&&u_3&=&v_3\end{array}\right|\\
&\iff v=(v_1,v_2,v_3)\wedge\left[u_3=v_3\wedge \left.\begin{array}{ccccc} u_1&+&2u_2&=&v_1-v_3\\ u_1&-&u_2&=&v_2+v_3\end{array}\right|\right]\\
&\iff v=(v_1,v_2,v_3)\wedge\left[u_3=v_3\wedge\ 3u_2 = v_1-v_2-2v_3\right]\\
&\iff v=(v_1,v_2,v_3)\wedge\left[u_3=v_3\wedge \begin{array}{ccc} u_2&=&\dfrac{v_1-v_2-2v_3}{3}\\ u_1&=&\dfrac{v_3+2v_2+v_1}{3}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que existe $u=\left(\dfrac{v_3-2v_2+v_1}{3},\dfrac{v_1-v_2-2v_3}{3},v_3\right)$, tal que

$$T\left(\frac{v_3+2v_2+v_1}{3},\frac{v_1-v_2-2v_3}{3},v_3\right)=(v_1,v_2,v_3) \tag{202}$$

Así concluimos que T es sobreyectiva, pues

$$Img(T)=\mathbb{R}^3$$

En particular, si definimos la función $H:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^3$ tal que

$$H(v_1,v_2,v_3)=\left(\frac{v_3+2v_2+v_1}{3},\frac{v_1-v_2-2v_3}{3},v_3\right) \tag{203}$$

entonces de (202) y (203), sigue que:

$$\begin{aligned}
(T\circ H)(v_1,v_2,v_3) &= T\left(\tfrac{v_3+2v_2+v_1}{3},\tfrac{v_1-v_2-2v_3}{3},v_3\right)\\
&= \left(\tfrac{v_3+2v_2+v_1}{3}+2\tfrac{v_1-v_2-2v_3}{3}+v_3,\tfrac{v_3+2v_2+v_1}{3}-\right.\\
&\quad\left.-\tfrac{v_1-v_2-2v_3}{3}-v_3,v_3\right)\\
&= (v_1,v_2,v_3)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$(H\circ T)(u_1,u_2,u_3)=(u_1,u_2,u_3)$. Es decir,$T$ posee inversa y H, la es. Es decir $H=T^{-1}$.

6.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(100)$. Determine la matriz A correspondiente en cada caso:

- $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$
- $a_{ij} = \begin{cases} j & : i \leq j \\ 1 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$
- $a_{ij} = \begin{cases} i+j & : i \geq j \\ i-j & : \text{ en otro caso} \end{cases}$
- $a_{ij} = \begin{cases} i^2-j^2 & : i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$

(2) Calcule $Tr(A)$ (traza de A) en el ejercicio anterior.

(3) Demuestre en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ que:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $A = A^t \Longleftrightarrow (a_{ij}) = (a_{ji})$

(4) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ determine los conjuntos

- $S_A = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid A = A^t\}$ matrices simétrica de orden 3.
- $AS_A = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid A = -A^t\}$ matrices antisimétrica de orden 3.

(5) Demuestre que:

- $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \Longrightarrow A + A^t \in S_A$
- $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \Longrightarrow A - A^t \in AS_A$

(6) Demuestre que $S_A \cap AS_A = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)}\}$

(7) Demuestre que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) = S_A + AS_A$

Notación: $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) = S_A \oplus AS_A$

(8) Define una nueva operación en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ como sigue:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$G = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}(i=1,2) \right\}$$

- Muestre que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$
- Demuestre que (G,+) es un grupo

- Si $G' = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$

  Demuestre que $G = G'$

(9) En $\mathbb{R}^3$ define la operación $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

- $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \rangle$
- $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \rangle$

(10) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y - x)$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que T no es un Isomorfismo.
- Grafique $ker(T)$

(11) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y)$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que T es un Isomorfismo.
- Determine T^{-1}

(12) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, z)$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que T es sobreyectivo.
- Grafique $ker(T)$

(13) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $T(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos.
- demuestre que T es sobreyectivo.
- Determine $ker(T)$

(14) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $T(a_{ij}) = (a_{ji})$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos.
- demuestre que T es un isomorfismo.

(15) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y)$

- Demuestre que $T \circ T$ es un Isomorfismo.
- Determine $(T \circ T)^{-1}$

(16) Sea $(G, *)$ un grupo y

$$T : G \longmapsto G \text{ una función tal que}$$

- T es un homomorfismo de grupos
- $T \neq (0)$ y $T \neq I_G$
- $T \circ T = T$

Demuestre que T no es inyectiva.

(17) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x - a_1x^2$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos
- Demuestre que T es un isomorfismo
- Determine T^{-1}

(18) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0x + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \dfrac{a_2}{3}x^3$

- Demuestre que T es un homomorfismo de grupos
- Determine $Img(T)$

(19) Exhiba un isomorfismo entre los grupos $\mathbb{R}_n[x]$ y $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1 \times (n+1))$

(20) Complete las siguientes sentencias:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A = A^t$ entonces $x =$
- Si A es simétrica entonces $A - A^t =$
- Si A es una matriz triangular superior entonces A^t es
- Si A es una matriz diagonal entonces $A^t =$

CAPITULO 5

Introducción a la teoría de anillos

Contenidos

- Introducción a los anillos
- Anillo de matrices
- El cuerpo de números complejos
- Anillo de polinomios
- Fracciones parciales

1. Introducción a los Anillos

Objetivos

(1) Que el Estudiante determine si un conjunto, junto con dos operaciones binarias constituye un anillo.

(2) Que el Estudiante determine el determinante de matrices de orden pequeño.

(3) Que el Estudiante concluya que el determinante decide la invertibilidad de una matriz.

(4) Que el Estudiante concluya que los procesos invertibles son fundamentales en el modelamiento y manipulación científica de los datos.

Definición 1.0.1.

Sea $\mathbb{A}$ *un conjunto. Diremos que* $(A, *, \circ)$ *posee la estructura de anillo si*

(1) $(\mathbb{A}, *)$ *es un grupo abeliano*

(2) $(\mathbb{A}, \circ)$ *es asociativo, es decir,* $(\forall a; a \in \mathbb{A})$, $(\forall b; b \in \mathbb{A})$, $(\forall c; c \in \mathbb{A})$ *tenemos que:*

$$(a \circ b) \circ c \ = \ a \circ (b \circ c)$$

(3) $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *es distributiva, es decir,* $(\forall a; a \in \mathbb{A})$, $(\forall b; b \in \mathbb{A})$, $(\forall c; c \in \mathbb{A})$ *tenemos que:*

$$\begin{aligned} a \circ (b * c) &= (a \circ b) * (a \circ c) \quad \textit{distributividad izquierda} \\ (b * c) \circ a &= (b \circ a) * (c \circ a) \quad \textit{distributividad derecha} \end{aligned}$$

Si además en $(\mathbb{A}, \circ)$ *es conmutativo y existe neutro* $e_{\mathbb{A}}$, *respecto de la operación* $\circ$ *es decir,* $(\forall a; a \in \mathbb{A})$, $(\forall b; b \in \mathbb{A})$ *tenemos que:*

$$a \circ b = b \circ a \qquad \wedge \qquad a \circ e_{\mathbb{A}} = e_{\mathbb{A}} \circ a = a$$

Entonces $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *se llama un anillo conmutativo con identidad* $e_{\mathbb{A}}$.

Ejemplo 1.0.2.

(1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, *es un anillo conmutativo con identidad 1.*

(2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, *es un anillo conmutativo con identidad 1.*

(3) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *es un anillo conmutativo con identidad 1.*

(4) *Si definimos el conjunto:*

$$2\mathbb{Z} \quad = \quad \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

entonces $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, *es un anillo conmutativo sin identidad.*

Definición 1.0.3.

Sea $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *un anillo con identidad* $e_{\mathbb{A}}$ *entonces* $a \in \mathbb{A}$ *se dice una unidad o invertible en* $\mathbb{A}$ *si existe* $b \in \mathbb{A}$ *tal que* $a \circ b = e_{\mathbb{A}}$ *y* $b \circ a = e_{\mathbb{A}}$ *y llamamos unidades de* $\mathbb{A}$ *al conjunto:*

$$\mathbb{U}(\mathbb{A}) \quad = \quad \{a \in \mathbb{A} \mid a \text{ es una unidad}\}$$

Ejemplo 1.0.4.

(1) *En* $\mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$

(2) *En* $\mathbb{Q}$, $\quad \mathbb{U}(\mathbb{Q}) = Q - \{0\}$

(3) *En* $\mathbb{R}$, $\quad \mathbb{U}(\mathbb{R}) = R - \{0\}$

2. El anillo de matrices

Sabemos que $(\mathbb{M}, +)$ es un grupo abeliano así que, para hacer un anillo de las matrices debemos definir un producto asociativo y distributivo.

2.1. Producto de matrices.

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s)$ y entonces definimos la operación producto de matrices por

(204)
$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & : & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m) & \times & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s) \\ & & (A & , & B) & \longmapsto & A \cdot B \end{array}$$

Tal que si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces $A \cdot B = C$ donde $C = (c_{ij})$, y

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo 2.1.1.

(1) *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *entonces*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 69 & 1 & 49 \\ 16 & 55 & -21 & 43 \end{pmatrix}$$

(2) *Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 & = & b_5 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

entonces $(\star)$ *puede ser escrito en forma matricial como sigue:*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 & = & b_5 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

(3) *Supongamos que tenemos tres tiendas, digamos A, B, C, y cada una de ellas tiene en stock dos artículos,* art_1 *y* art_2*, distribuidos como sigue, la tienda A posee 2* art_1 *y 4* art_2*; la tienda B posee 5* art_1 *y 7* art_2 *y la tienda C posee 4* art_1 *y 3* art_2 *entonces podemos distribuir según la matriz:*

$$M(art \times tiendas) = \begin{pmatrix} & & A & B & C \\ & & - & - & - \\ art_1 & | & 2 & 5 & 4 \\ art_2 & | & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M(art \times tiendas) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ *representa la cantidad total de artículos por tienda.*
- $M(art \times tiendas) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix}$ *representa la cantidad total de artículos del tipo uno y dos en stock*

2.2. Propiedades del Producto de matrices.

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

En efecto

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m)$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times s)$ y $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s \times t)$ entonces

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & B\cdot C & = & (d_{ij}) & \text{donde} \quad d_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{s} b_{ik}c_{kj}\\
(2) & A\cdot(B\cdot C) & = & (e_{ij}) & \text{donde} \quad e_{ij}=\displaystyle\sum_{p=1}^{m} a_{ip}d_{pj}
\end{array}
$$

Así que;

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}d_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{r=1}^{s} b_{kr}c_{rj}\right)\\
&= \sum_{r=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$(e_{ij}) = (A\cdot B)\cdot C$$

(2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

En efecto

Si $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times m)$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times s)$ y $C=(c_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times s)$ entonces

$$
\begin{aligned}
A\cdot(B+C) &= (a_{ij})[(b_{ij}+c_{ij}]\\
&= (d_{ij})
\end{aligned}
$$

donde, $d_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik}[b_{kj}+c_{kj}]$. así que

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}[b_{kj}+c_{kj}]\\
&= \sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot b_{kj}+a_{ik}\cdot c_{kj}]\\
&= \sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot b_{kj}]+\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\cdot c_{kj}]\\
&\Downarrow\\
(d_{ij}) &= A\cdot B+A\cdot C\\
&\Downarrow\\
A\cdot(B+C) &= A\cdot B+A\cdot C
\end{aligned}
$$

Analogamente tenemos que:

$$(B+C)\cdot A = B\cdot A+C\cdot A$$

Luego, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 2.2.1.

$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), +, \cdot)$ *es un* <u>*anillo no conmutativo*</u> *con identidad* I_n, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

En efecto

Si $A = (a_{ij})$ *entonces*

$$A \cdot I_n \;=\; (t_{ij})$$

donde $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = aij$. *Así que* $A = (t_{ij})$.

Analogamente

$$I_n \cdot A \;=\; A$$

Ahora, observamos que por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que, $A \cdot B \neq B \cdot A$

2.3. Ejercicios propuestos de producto de matrices.

(1) Verdadero o Falso

- $(-A)^t = -(A^t)$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $A \cdot B = (0) \Longrightarrow A = (0) \vee B = (0)$
- $(k_1 A)(k_2 B) = (k_1 k_2) AB$
- $(-A)(-B) = -(AB)$
- Se A y B son simétricas entonces $AB = BA$
- Si podemos multiplicar $A \cdot A$ entonces A es cuadrada

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto:

$$S = \{B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid B^2 = A\}$$

(3) Demuestre que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (siempre que el producto tenga sentido)

(4) Un contructor tiene contrato para construir tres (3) estilos de casa: moderno, mediterráneo y colonial. La cantidad de material empleada en cada tipo de casa es dada por la matriz:

	Fierro	*Madera*	*Vidrio*	*Pintura*	*Ladrillo*
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterraneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

- Si el va a construir 5,7 y 12 casas de los tipos moderno, mediterráneo y colonial respectivamente, ¿cuántas unidades de cada material serán empleadas?.

- Suponga ahora que los precios por unidad de fierro, madera, vidrio, pintura, ladrillo sean 15,8,5,1 y 10 unidades monetarias, respectivamente. ¿ Cuál es el precio unitario de cada tipo de casa ?.

- ¿ Cuál es le costo total del material empleado ?

(5) Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Una red de comunicación tiene cinco locales con transmisores de potencias distintas. Estableceremos para la matriz $(\star)$ las siguientes condiciones:

(i) $a_{ij} = 1$ significa que la estación i transmite directamente a la estación j.

(ii) $a_{ij} = 0$ significa que la estación i no alcanza a la estación j. Observe que $a_{ii} = 0$ significa que una estación no transmite directamente para si misma.

- ¿ Cúal será el significado de la matriz $A^2 = A \cdot A$. Observe por ejemplo que si $A^2 = (c_{ij})$ entonces

$$c_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

  Además el único valor no nulo 1 proviene del producto $a_{43} \cdot a_{32} = 1$. Esto significa que la estación 4 transmite para la estación 2 a través de una retransmisión por la estación 3, aunque no exista una transmisión directa de 4 a 2.

- Calcule A^2

- ¿ Cúal es el significado de $c_{13} = 2$?

- Discuta el significado de los términos no nulos, iguales a 1 y mayores que 1 de modo que pueda justificar la afirmación:
  " La matriz A^2 representa el número de caminos disponibles para ir de una estación a otra con una única retransmisión."

- ¿ Cúal es el significado de las matrices $A + A^2$, A^3 y $A + A^2 + A^3$

- Si A fuese simétrica ¿ qué significaría ?

3. Unidades en el anillo $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

3.1. Determinantes.

Motivación 3.1.1. *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{ccccc|} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \\ \hline \end{array}$$

Resolver el sistema significa encontrar el valor de x e y de tal forma que se satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

Ahora como el sistema se puede reescribir matricialmente como.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

entonces resolver el sistema significa encontrar el valor de la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Equivalentemente encontraremos la matriz X si y sólo si la podemos "despejar ", es decir.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la pregunta es ¿ quién es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$ *? y ¿existe siempre? y ¿es fácil de encontrar?, en cualquier caso, la respuesta la sabremos sólo si somos capaces de resolver el sistema.*

$$\begin{array}{ccccc|} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|} a_{11}a_{22}x & + & a_{12}a_{22}y & = & b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x & + & a_{22}a_{12}y & = & b_2a_{12} \\ \hline \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Analogamente,

$$\left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} a_{11}a_{21}x & + & a_{12}a_{21}y & = & b_1a_{21} \\ a_{21}a_{11}x & + & a_{22}a_{11}y & = & b_2a_{11} \end{array}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y \quad = \quad b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

Luego el sistema tiene solución si y sólo si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$

Más aún, ahora estamos en condiciones de responder el problema para este caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Si definimos para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *su determinante como:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

entonces tenemos lo siguiente:

El sistema matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tiene solución si y sólo si

(1) $\det(A) \neq 0$, *y*

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{\det(A)} \\ \\ \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\det(A)} \end{pmatrix}$, y

(3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{pmatrix}$

En el caso general podemos definir de la siguiente forma:

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, para $n \geq 2$ y $A = (a_{ij})$ entonces

$$\det(A) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}a_{ik} \qquad \text{(Método de Laplace)}$$

representa el determinante de la matriz A, calculado por la fila "i''; donde :

(1) A_{ij} = matriz obtenida de la matriz A eliminando la fila i y la columna j.

Ejemplo 3.1.2.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *entonces*

- $A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\Delta_{ij} = (-1)^{(i+j)}\det(A_{ij})$ para $(i = 1, 2, \ldots, n); (j = 1, 2, \ldots, n)$, representa el cofactor de la posición ij.

Ejemplo 3.1.3.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *entonces para la fila uno (1) tenemos:*

$$\Delta_{11} = (-1)^2(-3) \quad \wedge \quad \Delta_{12} = (-1)^3(-6) \quad \wedge \quad \Delta_{13} = (-1)^4(-3)$$

Así que para esta matriz tenemos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \Delta_{11}a_{11} + \Delta_{12}a_{12} + \Delta_{13}a_{13} \\ &= (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aunque el desarrollo de Laplace calcula un determinante, no obstante su proceso recurrente es demasiado caro en tiempo para matrices de tamaño grande, así que es necesario mejorar tal método obteniendo consecuencias útiles desde la definición:

(1) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $\det(A) = \det(A^t)$

En efecto

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \Delta_{sj} a_{sj}$$

(2) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ posee una fila o una columna nula entonces $\det(A) = 0$

En efecto

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} \cdot 0 = 0, \text{ calculando por la fila nula}$$

(3) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$ entonces podemos definir una función como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \\ A & \longmapsto & B \end{array}$$

Donde, $B = A$, salvo que posee la fila i multiplicada por α.

Ejemplo 3.1.4.

$$(L_2 \longleftrightarrow 3L_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(L_i \longleftrightarrow \alpha L_i)(A) = \alpha \det(A)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \det(B) = \det((L_i \longleftrightarrow \alpha L_i)(A)) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} \alpha a_{ik} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} a_{ik} \\ &= \alpha \det(A) \end{aligned}$$

(4) Definamos la siguiente función permutación de filas como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \\ A & \longmapsto & B \end{array}$$

Donde, $B = A$, salvo que posee permutada la fila i con la fila j.

Ejemplo 3.1.5.

$$(L_1 \longleftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(L_i \longleftrightarrow L_{i+1})(A) = -\det(A)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\det(B) = \det((L_i \longleftrightarrow L_{i+1})(A)) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_{(i+1)k} a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+1+k)} \det(A_{ik}) a_{ik} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+k)} \det(A_{ik}) a_{ik} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \Delta ik a_{ik} \\
&= -\det(A)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.6.

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3 \qquad \wedge \qquad \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3
$$

(5) Si A posee dos filas (o columnas) iguales entonces $\det(A) = 0$

En efecto

Esta propiedad es un corolario de la propiedad anterior, pues si la fila i y la fila j son iguales entonces

$$
\det(A) = \det((L_i \longleftrightarrow L_j)(A)) = -\det(A)
$$

Ejemplo 3.1.7.

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0
$$

Las siguientes propiedades quedarán de ejercicios:

(6) Si definimos la función:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & (L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j) & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \\
A & \longmapsto & B
\end{array}
$$

Donde, $B = A$, salvo que posee sustituida la fila i por la fila i más α veces la fila j entonces

$$
\det(A) \;=\; \det((L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j)(A))
$$

Ejemplo 3.1.8.

$$
\begin{aligned}
\det\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\right] & \overset{(L_2\longrightarrow L_2-4L_1)}{=} & \det\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\right]\\
& \overset{(L_3\longrightarrow L_3-7L_1)}{=} & \det\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix}\right]\\
& = & \det\left[\begin{pmatrix}-3 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}\right]\\
& = & 0
\end{aligned}
$$

(7) Adición en una fila:

$$
\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{i1} & \dots & b_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\right] + \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \dots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\right]
$$

(8) Determinante de un producto

$$
\det(A\cdot B) \;=\; \det(A)\cdot\det(B)
$$

3.2. Ejercicios resueltos de determinante.

(1) Si $A=(a_{ij})$ es una matriz triangular entonces $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn}$
En efecto

Aplicamos la definición por la primera fila si es triangular inferior, o por la primera columna si es triangular superior.

(2) Calculemos usando propiedades el siguiente determinante:

$$
A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}
$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{\text{(definición)}}{=} a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{(L_4 \longrightarrow L_4 - L_2)}{=} a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(definición)}}{=} a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(definición)}}{=} a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(definición)}}{=} 2a^3$$

(3) Demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

En efecto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \longrightarrow L_2 - xL_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (y-x) & (z-x) \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(L_3 \longrightarrow L_3 - x^2 L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (y-x) & (z-x) \\ 0 & (y^2-x^2) & (z^2-x^2) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(definición)}}{=} \begin{vmatrix} (y-x) & (z-x) \\ (y^2-x^2) & (z^2-x^2) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2)$$

$$= (y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

3.3. Ejercicios propuestos de determinantes.

(1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule explicitamente:

(a) $\det(A + B)$

(b) $\det(A) + \det(B)$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ dos matrices. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) $\det(2A) = 2\det(A)$

(b) $\det(A^2) = (\det(A))^2$

(c) $\det(A_{ij}) < \det(A)$

(3) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine:

(a) A_{23}

(b) $\det(A_{23})$

(c) Δ_{23}

(d) $\det(A)$

(4) Calcule el determinante de las siguien tes matrices:

- $A = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) Si $A(n) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$.

Demuestre que

$$\det(A(n)) = (\alpha+\beta)\det(A(n-1)) - \det(A(n-2)) \qquad (n \geq 3)$$

(6) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule el determinante de las siguientes matrices

- $\det((L_1 \longleftrightarrow L_3)(A))$
- $\det((L_1 \longleftrightarrow L_2)(A))$
- $\det((L_2 \longrightarrow 2L_2)(A))$
- $\det\left(\begin{cases}(L_1 \longrightarrow -3L_1) \\ (L_2 \longrightarrow 2L-2)\end{cases} (A)\right)$
- $\det((L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_2)(A))$

(7) Demuestre que :

$$\det\begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{pmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(8) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$, es decir A es antisimétrica. Demuestre que

$$\det(A^t) = (-1)^n \det(A)$$

(9) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$. Demuestre que

$$n \text{ impar } \Longrightarrow \det(A) = 0$$

(10) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A^s = 0$ y $A^{s-1} \neq 0$, una tal matriz se llama matriz nilpotente. Demuestre que $\det(A) = 0$

(11) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A^2 = A$, una tal matriz se llama matriz idempotente. Determine $\det(A)$

3.4. Determinante y matriz inversa.

Recordemos que si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times s)$ entonces $A \cdot B = C$, donde $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times s)$ tal que

$$c_{ij} \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -21 \\ 3 & 6 & -10 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

En particular, si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $A^s = A \cdot A \cdots A \quad$ (s veces) y $A^s \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

Observación 3.4.2.

Sea $I_n = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ la matriz identidad de tamaño n entonces

(1) *Diremos que A es una matriz invertible o no singular o una unidad en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ si existe $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, en tal caso notamos $B = A^{-1}$.*

(2) *Si $U(n) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid A \text{ invertible}\}$ entonces $U(n)$ es un grupo no abeliano con el producto de matrices.*

(3) *Sea $A \in U(n)$ entonces*

$$\begin{aligned} A \in U(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists A^{-1}; A^{-1} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)\right) : A \cdot A^{-1} = I_n \\ &\Longrightarrow \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \\ &\Longrightarrow \quad \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \wedge \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1} \end{aligned}$$

Así, nuestra primera conclusión es:

$$A \in U(n) \Longrightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} \tag{205}$$

(4) *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = (a_{ij})$ entonces sabemos que $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, es el cofactor de a_{ij} así que podemos construir a partir de los cofactores de la matriz A una nueva matriz en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ definiendo:*

$$\widetilde{A} = (\Delta_{ij})$$

Ejemplo 3.4.3.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ entonces } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente, llamaremos adjunta de la matriz A a la matriz:

$$adj(A) = \widetilde{A}^t$$

Ejemplo 3.4.4.

Para la matriz A del ejemplo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} adj(A) &= \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -15 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -15 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observen que en este ejemplo tenemos que

$$\begin{aligned} A \cdot adj(A) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19 & -15 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix} \\ &= -19I_3 \\ &= \det(A)I_3 \end{aligned}$$

Así que en este caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

El resultado anterior no es una casualidad, en realidad tenemos el siguiente:

Teorema 3.4.5.

$A \cdot adj(A) = \det(A)I_n = adj(A) \cdot A$

Se lo dejo de tarea y le sugiero que lo verifique para casos pequeños para después generalizar al caso n.

Conclusión 3.4.6.

Si $U(n) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid A \textit{ invertible}\}$ *entonces*

$$\boxed{A \in U(n) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

En tal caso,

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \wedge \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)}$$

3.5. Ejercicios resueltos de matriz inversa.

(1) Sea $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ entonces

(i) Como $\det(A) = 6 \cdot 4 - 11 \cdot 2 = 2$ entonces existe A^{-1}, usando el teorema anterior podemos calcular la inversa:

(a) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\dfrac{11}{2} & 3 \end{pmatrix}$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces

$$A \in U(n) \wedge B \in U(n) \Longrightarrow A \cdot B \in U(n)$$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} A \in U(n) & \Longleftrightarrow & (\exists A^{-1}; A^{-1} \in U(n)) \\ B \in U(n) & \Longleftrightarrow & (\exists B^{-1}; B^{-1} \in U(n)) \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} (AB)(B^{-1}A^{-1}) & = & A(BB^{-1})A^{-1} \\ & = & AI_nA^{-1} \\ & = & AA^{-1} \\ & = & I_n \end{array}$$

Luego,

$$(AB)^{-1} \;=\; B^{-1}A^{-1}$$

3.6. Ejercicios propuestos de matriz inversa.

(1) Determine $\det(A)$ y si es posible A^{-1} para las siguientes matrices:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Demuestre que

$$A \in U(n) \Longleftrightarrow A^t \in U(n)$$

(3) Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & (1-\alpha) \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$U(A) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \in U(2)\}$$

(4) Sea $A = \begin{pmatrix} -\alpha & (\alpha - 1) & \alpha + 1) \\ 1 & 2 & 3 \\ (2-\alpha) & (\alpha + 3) & (\alpha + 7) \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$U(A) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \in U(3)\}$$

(5) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Demuestre que

$$A \notin U(n) \Longrightarrow A \cdot adj(A) = (0)$$

(6) Demuestre que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in U(2)$ y determine A^{-1}

4. El anillo de polinomios

4.1. Preliminares.

Sabemos que:

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \iff p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Y que $(\mathbb{R}[x], +)$ es un grupo abeliano, con la adición definida por:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \end{aligned}$$

Observación 4.1.1.

"Casi naturalmente" aprendemos a realizar la multiplicación de polinomios, (casi siempre sin saber que lo son), por ejemplo:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 x) &= a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_1 b_1 x^2 \end{aligned}$$

Siguiendo esta ley de formación hacemos la siguiente:

Definición 4.1.2.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *entonces*

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

tal que

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \quad (0 \leq i \leq n+m)$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0\\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0\\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0\\
\vdots &\ \vdots\ \vdots\\
c_{n+m} &= a_0b_{n+m} + a_1b_{n+m-1} + a_2b_{n+m-2} + \cdots + a_{n+m}b_0
\end{aligned}$$

4.2. Algunas Propiedades de $\mathbb{R}[x]$.

(1) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x)(q(x)r(x)) = (p(x)q(x))r(x) \tag{206}$$

(2) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x)(q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x) \tag{207}$$

(3) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x)q(x) = q(x)p(x) \tag{208}$$

(4) Existe el polinomio identidad, definido por:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n \tag{209}$$

En efecto

Para (207), por ejemplo tenemos que:

$$\begin{aligned}
p(x)(q(x) + r(x)) &= \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \left[\sum_{i=0}^{n} b_ix^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{2n} d_ix^i
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
d_i &= \sum_{k=0}^{i} a_k(b_{i-k} + c_{i-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} + \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k} \\
&\Downarrow \\
d_i x^i &= \left[\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} + \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}\right] x^i
\end{aligned}$$

Luego,

$$p(x)(q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x)$$

De (206), (207), (208) y (209) sigue el siguiente:

Teorema 4.2.1.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con identidad 1*

De acuerdo anuestro desarrollo, en esta nueva estructura podemos definir el concepto de homomorfismo de anillos comno sigue:

Definición 4.2.2.

Sean $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *y* $(\mathbb{A}', *', \circ')$ *dos anillos y* $h : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}'$ *una función. Diremos que* h *es un homomorfismo de anillos si*

- $h(a * b) = h(a) *' h(b)$
- $h(a \circ b) = h(a) \circ' h(b)$

Observación 4.2.3.

(1) *Como* $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ *es un anillo con identidad entonces podemos preguntar ¿ quienes son las unidades de este anillo ?.*
Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
p(x) \in U(\mathbb{R}[x]) &\iff \left(\exists q(x);\ q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]\right):\ p(x)q(x) = 1 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 1 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 1 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right] x^i = 1 \\
&\Downarrow \\
\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} &= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^{2n}
\end{aligned}
$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a_0b_0 &= 1 \\
a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \\
a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\
\vdots &\ \vdots\ \vdots \\
a_0b_{2n} + a_1b_{2n-1} + \cdots + a_{2n}b_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Así que $a_0 \neq 0$ *y* $a_i = 0 \quad (\forall i;\ 1 \leq i \leq 2n)$ *y entonces* $\partial p(x) = 0$*, es decir* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$*, osea que los únicos polinomios invertibles son los polinomios constantes no nulos. Luego,*

$$U(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R} - \{0\}$$

(2) *Los* $\mathbb{R}$ *inducen una "acción" funcional sobre los polinomios, si los reinterpretamos como sigue:*

(a) *Para cada* $r \in \mathbb{R}$ *podemos definir naturalmente la función* $\varphi(r)$ *como sigue:*

$$
\begin{array}{rcccc}
\varphi(r) & : & \mathbb{R}[x] & \longmapsto & \mathbb{R} \\
 & & p(x) & \longmapsto & \varphi(r)(p(x))
\end{array}
$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
\varphi(r)(p(x)) &= \varphi(r)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i r^i \\
&= p(r)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.4.

- $\varphi(2)(1+x^2-x^3) = 1+2^2-2^3 = -3$
- $\varphi(-1)(1+x^3) = 1+(-1)^3 = 0$

(b) *Para cada* $r \in \mathbb{R}$ $\varphi(r)$ *satisface las siguientes propiedades:*

- $\varphi(r)(p(x)+q(x)) = \varphi(r)(p(x)) + \varphi(r)(q(x))$, *es decir*

$$\varphi(r)(p(x)+q(x)) \quad = \quad p(r)+q(r)$$

- $\varphi(r)(p(x)q(x)) = \varphi(r)(p(x))\varphi(r)(q(x))$, *es decir*

$$\varphi(r)(p(x)q(x)) \quad = \quad p(r)q(r)$$

Luego, para cada $r \in \mathbb{R}$ $\varphi(r)$ *es un homomorfismo de anillos, al cual llamaremos " homomorfismo evaluación."*

(c) *Problema: Si* $\varphi(r)$ *es un homorfismo de anillos. ¿ Cúal será su núcleo (kernel) ?. veamos:*

$$\begin{aligned} p(x) \in ker(\varphi(r)) &\iff \varphi(r)(p(x)) = 0 \\ &\iff p(r) = 0 \end{aligned}$$

Así que

$$ker(\varphi(r)) \quad = \quad \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \; p(r) = 0\} \tag{210}$$

Ejemplo 4.2.5.

$(1+x^3) \in ker(\varphi(-1))$, *pues* $\varphi(-1)(1+x^3) = 0$

Lo anterior nos permite definir, por ahora abstractamente el concepto de "raíz de un polinomio"

Definición 4.2.6.

$r \in \mathbb{R}$ *se llamará una raíz o cero, de un polinomio* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *si* $p(x) \in ker(\varphi(r))$, *equivalentemente* $p(r) = 0$

(3) *Volveremos a estudiar más adelante otras propiedades relevantes y útiles de* $\mathbb{R}[x]$

5. El cuerpo de Números Complejos

5.1. Ideas informales.

(1) Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, sabemos que ellos poseen muchas bondades, entre ellas el tener un primer elemento y de ser ordenados:

$$m < n \iff (\exists r; r \in \mathbb{N}) : m + r = n$$

Lamentablemente, la ecuación

$$m + x = n \text{ tiene solución en } \mathbb{N} \iff m < n \tag{211}$$

En general la solución de la ecuación independiente de la condición (211) implicaría la existencia de los elementos de la forma $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$; es decir agregamos un elemento neutro y el correspondiente inverso para cada elemento, respecto de la adición de naturales, pero al hacer eso obtenemos los números enteros $\mathbb{Z}$ (claro que existe una construcción precisa y bella de estos, puede ser encontrada en el libro sistemas numéricos de Bravo).

(2) Así, como es sabido $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano y tiene solución única en $\mathbb{Z}$ la ecuación:

$$m + x \;=\; n \qquad (m \in \mathbb{Z}); (n \in \mathbb{Z})$$

No obstante, siguiendo la misma línea de razonamiento encontramos que la ecuación:

$$m \cdot x \;=\; n \text{ tiene solución en } \mathbb{Z} \iff n \text{ es un múltiplo de } m \tag{212}$$

En general la solución de la ecuación independiente de la condición (212) implicaría la existencia de los elementos de la forma $\left\{\dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Z}; m \neq 0\right\}$; es decir agregamos los correspondientes inversos para cada elemento, respecto de la multiplicación, pero al hacer eso obtenemos los números racionales $\mathbb{Q}$ (claro que existe una construcción precisa y bella de estos, puede ser encontrada en el libro sistemas numéricos de Bravo).

(3) De la misma forma que antes encontramos que la ecuación:

$$x^2 - a = 0 \text{ tiene solución en } \mathbb{Q} \iff a \text{ es un cuadrado} \tag{213}$$

Luego, agregando a $\mathbb{Q}$ las "raíces", obtenemos los números Reales $\mathbb{R}$.

Observamos que:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo abeliano y $(\mathbb{Q} - \{0\}, \bullet)$ es un grupo abeliano. Analogamente, $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano y $(\mathbb{R} - \{0\}, \bullet)$ es un grupo abeliano
- $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ y $(\mathbb{R}, +, \bullet)$, son ejemplos de estructuras de cuerpos conmutativos con identidad 1.

Aunque $(\mathbb{R}, +, \bullet, \leq)$, es el único cuerpo ordenado completo como bien habrán visto y estudiado en Cálculo I, lamentablemente la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ tiene solución en } \mathbb{R} \iff b^2 - 4ac \geq 0 \tag{214}$$

Pues sabemos que la raíces o soluciones de (214) son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \wedge \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ahora, si $b^2-4ac<0$ entonces $-(b^2-4ac)>0$ así que, en ese caso tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\sqrt{-1}}{2a} \\ &= \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{\in\mathbb{R}}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Así

$$x_1 = c + d\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad x_2 = c - d\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Donde

$$c = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad d = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5.1.1.

Considera la ecuación "padrón".

(215) $$x^2+1 = 0$$

De acuerdo a nuestra fórmula tenemos que las soluciones de (215), son de la forma:

$$x_1 = \sqrt{-1} \qquad \wedge \qquad x_2 = -\sqrt{-1}$$

Observen que estamos infringiendo una ley básica de las potencias, pues asumimos que $(\sqrt{-1})^2 = -1$, pero $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, ya que en $\mathbb{R}$ los cuadrados son positivos o nulos. ¿ Qué hacer ?

(4) Intentemos los siguientes caminos:

Camino 1 (Equipamiento vía biyecciones)

(1) Como $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ entonces llamemos $\sqrt{-1} := i$, elemento no real(irreal) o imaginario y conjuntemos o "setiemos" como dice la gente de computación estos elementos.

(216) $$\mathbb{C} = \{x+iy \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

(2) Define la función φ entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x+iy \end{array}$$

φ es una biyección, pues $(\varphi)^{-1}$ es definida naturalmente por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \stackrel{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ x+iy & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

(3) Como $\mathbb{R}^2$es un grupo con la adición, usemos la biyección para "equipar" a $\mathbb{C}$ con estructura de grupo, como sigue:

$$u_1 = (x_1, y_1) \longmapsto z_1 = \varphi(x_1, y_1) = x_1 + iy_1$$

$$u_2 = (x_2, y_2) \longmapsto z_2 = \varphi(x_2, y_2) = x_2 + iy_2$$

entonces definimos:

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{\varphi}{\Longleftrightarrow} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{217}$$

Así tenemos que

Teorema 5.1.2.

$(\mathbb{C}, +)$ *es un grupo abeliano, donde:*

(i) $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0 \cdot i$ es el neutro aditivo.

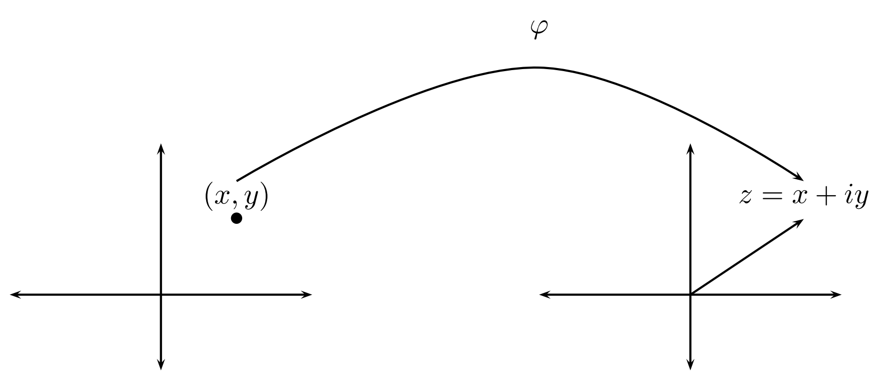
(ii) Si $z = x + iy$ entonces $-z = -x - iy$ es el inverso aditivo de z

(iii) $(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} i \in \mathbb{C}$

(iv) Si $z = x + iy$ entonces llamamos parte real de z a $Re(z) = x$ y parte imaginaria de z a $Im(z) = y$

Ejemplo 5.1.3. *Sea* $z = 2 - 3i$ *entonces* $Re(z) = 2$ *e* $Im(z) = -3$

La acción geométrica del isomorfismo es:



(a) Anillo de números complejos

(i) Producto de complejos:

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ en $\mathbb{C}$ entonces definimos el producto de números complejos como sigue:

$$z_1 \cdot z_2 \quad = \quad (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ejemplo 5.1.4.

Si $z_1 = 2 + 3i$ *y* $z_2 = 1 - 4i$ *entonces*

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2+3i)(1-4i) \\ &= (2-(-12)) + i(3+(-8)) \\ &= 14 - 5i \end{aligned}$$

(ii) Propiedades del producto de complejos

- $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3 \quad (\forall z_i; z_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2, 3)$
- El complejo $1 = 1 + 0i$ es el neutro multiplicativo
- Si $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$
es el inverso multiplicativo de z
- $z_1z_2 = z_2z_1 \quad (\forall z_i : z_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2)$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad (\forall z_i : z_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2, 3)$

Lo anterior lo enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 5.1.5.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con identidad 1. Más aún* $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Definición 5.1.6. *Sea* $\mathbb{A}$ *un conjunto no vacío. Diremos que* $\mathbb{A}$ *es un cuerpo conmutativo con identidad 1 si* $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *es un anillo conmutativo con identidad 1 y todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo.*

Conclusión 5.1.7.

(i) *Si extendemos la estructura de* $\mathbb{R}^2$ *a un cuerpo, vía* φ*, poniendo:*

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) \quad = \quad (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

entonces φ *es un isomorfismo de cuerpos.*

Definición 5.1.8.

$\mathbb{C}$ *será llamado el cuerpo de números complejos y si* $z = x + iy$*, diremos que* z *esta en la forma binomial y si* $z = (x, y)$ *diremos que* z *esta en la forma de par ordenado.*

Si notamos $i = \sqrt{-1}$ o bien $i^2 = -1$ entonces podemos hacer la siguiente:

Si para un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ calculemos $p(i)$ entonces para n par.

$$\begin{aligned} p(i) &= a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4 + \cdots + a_n i^n \\ &= a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i + a_4 + \cdots + a_n \quad \text{(aplicando iteradamente) } i^2 = -1 \\ &= c + di \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.9.

Sea $p(x) = 2 + 3x + 5x^2 + x^3$ *entonces*

$$\begin{aligned} p(i) &= 2 + 3i + 5i^2 + i^3 \\ &= 2 + 3i - 5 - i \\ &= -3 + 2i \end{aligned}$$

Una somera conclusión es que $\mathbb{R}[i]$" = "$\mathbb{C}$, es decir, en los polinomios "identificamos" x con i. Para profundizar sobre extensiones de cuerpo puede partir consultando el texto Algebra Conmutativa de J. Fraleigh

5.2. Raíces de la unidad.

Queremos resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$z^n = 1 \tag{218}$$

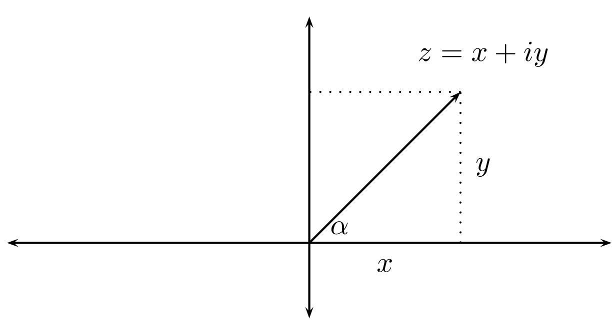
Para ello implementaremos la siguiente estrategia.

(1) Planteamiento del problema. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = 1$ entonces

$$(x + iy)^n = 1$$

Ese cálculo binomial se ve sumamente duro en términos de tiempo de ejecucución.

(2) Consideremos la figura



Entonces tenemos que

$$x = |z| \cos\alpha \qquad \wedge \qquad y = |z| \sin\alpha$$

Donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el módulo del complejo z.

Luego, tenemos una nueva forma de escribir un complejo:

$$z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Esta forma la llamaremos forma polar o trigonométrica de z.

Ahora observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 &= \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha\\ &= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\end{aligned}$$

En general tenemos que

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \qquad (n\in\mathbb{N})$$

(3) aplicando estos resultados tenemos que

$$\begin{aligned}z^n = 1 &\iff |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 1 + 0i\\ &\iff \left.\begin{array}{rcl}|z|\cos n\alpha &=& 1\\ |z|\sin n\alpha &=& 0\end{array}\right|\\ &\iff \left.\begin{array}{rcl}|z|^2\cos^2 n\alpha &=& 1\\ |z|^2\sin^2 n\alpha &=& 0\end{array}\right|\\ &\implies |z|^2(\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha) = 1\\ &\implies |z|^2 = 1\\ &\implies |z| = 1\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}z^n = 1 &\iff \left.\begin{array}{rcl}\cos n\alpha &=& 1\\ \sin n\alpha &=& 0\end{array}\right|\\ &\implies n\alpha = 2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})\\ &\implies \alpha = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Finalmente,

(219) $$z^n = 1 \iff z = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

(4) Sea $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$ entonces

- $\omega_n^n = \cos\frac{2n\pi}{n} - i\sin\frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1$
- $(\omega_n^k)^n = (\omega_n^n)^k = 1 \qquad (\forall k; k\in\mathbb{Z})$
- Luego, las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ son

$$\begin{aligned}R(n) &= \{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}\\ &= \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}\end{aligned}$$

Definición 5.2.1. *ω_n se llamará una raíz n-ésima primitiva de la unidad y ω_n^k se llamará una raíz n-ésima de la unidad.*

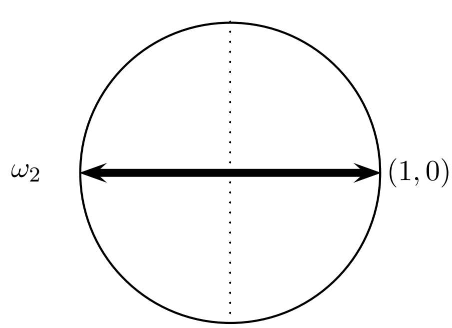
Ejemplo 5.2.2. *Si n=2 entonces*

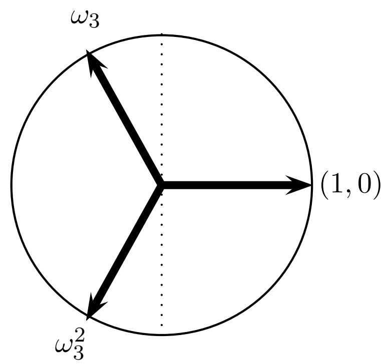
$$R(2) = \{1, \omega_2\} = \{1, \cos\frac{2\pi}{2} - i\sin\frac{2\pi}{2}\} = \{1, -1\}$$

Si n=3 entonces

$$\begin{aligned} R(3) &= \{1, \omega_3, \omega_3^2\} \\ &= \{1, \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\} \\ &= \{1, \cos 120 - i\sin 120, \cos 240 - i\sin 240\} \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos:





Es decir que en general $R(n)$ divide en n partes iguales al círculo unitario

5.3. Solución de la ecuación $z^n = u$.

Consideremos la ecuación

$$z^n = u \qquad (u \in \mathbb{C})$$

Apliquemos la siguiente estrategia para resolver la nueva ecuación.

(1) $z^n = u \Longleftrightarrow \dfrac{z^n}{u} = 1 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z}{\sqrt[n]{u}}\right)^n = 1$

(2) Sea $q = \dfrac{z}{\sqrt[n]{u}}$ entonces las soluciones de la ecuación $q^n = 1$ son dadas por $R(n)$, así que la solución final debe ser del tipo, $z_k = \sqrt[n]{u} \cdot \omega_n^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Por otra parte, como $u = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u} &= |u|^{\frac{1}{n}}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} \\
&= |u|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n})
\end{aligned}$$

Finalmente las soluciones son del tipo:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{u}\cdot\omega_n^k \\ &= |u|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n})\cdot(\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}) \\ &= |u|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\alpha-2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha-2k\pi}{n}) \quad k=0,1,2,\dots,n-1 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.1. *Resolvamos la ecuación* $z^3 = 1+i$.

Solución

(1) $1+i = |1+i|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl}\sqrt{2}\cos\alpha &=& 1\\ \sqrt{2}\sin\alpha &=& 1\end{array}\right| \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

(2) *Luego las soluciones son del tipo:*

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{45-2k\pi}{3}+i\sin\frac{45-2k\pi}{3}\right) \qquad k=0,1,2$$

Esto es:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 15 + i\sin 15) \\ z_1 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 315 - i\sin 315) \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 675 - i\sin 675) \end{aligned}$$

5.4. Matriz de Fourier.

Como $\omega_n^k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} - i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ y $\omega_n^{s+n} = \omega_n^s$ entonces podemos construir una matriz de orden n sobre los complejos, definiendola como sigue:

$$F_n = (\omega_n)^{i\cdot j} \qquad (i=0,1,2,\dots,n-1)\;(j=0,1,2,\dots,n-1)$$

Así por ejemplo:

(1) Para n=2 tenemos

$$\begin{aligned} F_2 &= \begin{pmatrix} \omega_2^{0\cdot 0} & \omega_2^{0\cdot 1} \\ \omega_2^{1\cdot 0} & \omega_2^{1\cdot 1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$F_2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y\end{pmatrix}$$

Así que el efecto de F_2 sobre dos datos es sumarlos y restarlos.

(2) Para $n=3$, tenemos:

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \end{pmatrix} \tag{220}$$

(3) Para $n = 4$, tenemos:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \tag{221}$$

Definición 5.4.1.

F_n se llama la Matriz de Fourier de tamaño n, para cada $n \in \mathbb{N}$

Observación 5.4.2.

Haremos uso adecuado del producto de matrices y usaremos una matriz de Fourier como un filtro.

(1) *Datos:*

- $F_n = (\omega_n)^{i\cdot j}$
- $X = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n-1) \end{pmatrix}$ *wedge* $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \\ \vdots \\ \hat{x}(n-1) \end{pmatrix}$ *matriz de transformados*
- $F_n \cdot X = \hat{X}$

De acuerdo al producto de matrices y a la igualdad de matrices tenemos que cada transformado se calcula de la forma:

$$\hat{x}(k) = \sum_{s=0}^{n-1} x(s)\omega_n^{ks} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

(2) *Así por ejemplo,*

Para $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{x}(k) &= \sum_{n=0}^{1} x(n)w_2^{kn} \qquad (k = 0, 1) \\ &= \sum_{n=0}^{1} x(n)(-1)^{kn} \qquad (k = 0, 1) \end{aligned}$$

e.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{x}(1) \end{pmatrix}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{x}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) + x(1) \\ x(0) - x(1) \end{pmatrix} \tag{222}$$

(3) *Sea* $n = 2^2$ *entonces*

$$\widehat{x}(k) \;=\; \sum_{n=0}^{2^2-1} x(n)(i)^{kn}$$

(a) *Desarrollando y reordenando los cálculos tenemos que*

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(0) &= [x(0)+x(2)]+[x(1)+x(3)] \\
\widehat{x}(1) &= [x(0)-x(2)]+i[x(1)-x(3)] \\
\widehat{x}(2) &= [x(0)+x(2)]-[x(1)+x(3)] \\
\widehat{x}(3) &= [x(0)-x(2)]-i[x(1)-x(3)]
\end{aligned}$$

(b) *Lo anterior puede ser resumido en lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(k) &= \sum_{n=0}^{2^2-1} x(n)w_4^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{1} x(2n)w_2^{kn} + w_4^k \sum_{n=0}^{1} x(2n+1)w_2^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{1} x(2n)w_2^{kn} + i^k \sum_{n=0}^{1} x(2n+1)w_2^{kn}
\end{aligned}$$

(4) *Finalmente, si* $n = 2^s$ *obtenemos la fórmula de reducción:*[1]

$$\widehat{x}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{2^s-2}{2}} x(2n)w_{2^{s-1}}^{kn} + w_{2^s}^k \sum_{n=0}^{\frac{2^s-2}{2}} x(2n+1)w_{2^{s-1}}^{kn}$$

5.5. Ejercicios Propuestos.

(1) Resolver las siguientes ecuaciones:

(i) $x^3 - 27 = 0$
(ii) $x^5 + 32 = 0$
(iii) $x^6 - i = 0$
(iv) $x^6 - 1 = 0$

(2) Si definimos $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, (fórmula de Euler) entonces:

(i) Demuestre que

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \wedge \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

(ii) Demuestre que

$$\cos^2 y \cdot \sin^2 y \;=\; -\frac{1}{8}\cos 4y + \frac{1}{8}$$

(iii) Demuestre que

$$2+i \;=\; \sqrt{5}\, e^{i\arctan(\frac{1}{2})}$$

[1]Todo lo anterior es descrito por el famoso y popular " Algoritmo de Cooley - Tukey "

(3) Si $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces demuestre que:

$$z = \frac{i-r}{1+2ir} \quad \Longrightarrow \quad \left| z - \frac{3}{4}\, i \right| = \frac{1}{4}$$

(4) Demuestre que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \right) (-1 - i\sqrt{3}) \left(\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5} \right)^{10n} \quad = \quad -2i$$

(5) Si $x_1 = \alpha - \alpha^4$ y $x_2 = \alpha^2 - \alpha^3$ entonces demuestre que

$$\alpha^5 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = -5$$

(6) Demuestre que

$$i \left(\frac{1 - e^{ix}}{1 + e^{ix}} \right) \quad = \quad \tan\frac{x}{2}$$

(7) Calcule

$$\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$$

(8) Determine el conjunto

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}^2 \}$$

(9) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ demuestre que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad Im(z) = 0 \quad \vee \quad |z| = 1$$

(10) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z \neq \pm i$ entonces demuestre que

$$z \cdot \bar{z} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R}$$

(11) Demuestre que las raíces cúbicas de la unidad son los vertices de un triángulo equilátero.

(12) Demuestre que

$$z \in R(7) - \{1\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z^6} = -2$$

(13) Si $z = n! + i(n-1)!$ y $w = n + i$ entonces demuestre que

$$\left| \frac{z}{w} \right| = (n-1)!$$

(14) Si $z = \cos\theta + i\sin\theta$ entonces demuestre que

$$z^n + \frac{1}{z^n} \quad = \quad 2\cos n\theta$$

(15) Demuestre que

$$(\sqrt{3} - i)^n \quad = \quad 2^n \left[\cos\frac{n\pi}{6} - i \sin\frac{n\pi}{6} \right]$$

5.6. Algo más sobre los polinomios.

Partiremos observando que las raíces complejas de un polinomio aparecen de ”a pares”, para verlo partimos con la dfinición.

Definición 5.6.1.

Llamaremos conjugación compleja a la función:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xmapsto{\ \bar{}\ } \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Tal que, si $z = x + iy$ *entonces* $\bar{z} = x - iy$.

Un tal $\bar{z}$ será llamado el conjugado de z y posee las propiedades inmediatas:

- $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad \wedge \qquad Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$
  En efecto

  Si $z = x + iy$ entonces $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$

  Luego,
  $$Re(z) = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$
  Analogamente

  $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy$

  Luego,
  $$Im(z) = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$
  Finalmente,

  $$\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$$

La importancia de la conjugación la enunciamos en el siguiente:

Teorema 5.6.2. *la conjugación compleja es un isomorfismo.*

En efecto, es inmediato que ”-” es un homomorfismo

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- Y su inversa es definida por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\overset{-^{-1}}{\longmapsto} \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Tal que, si $z = x + iy$ entonces $\overline{z}^{-1} = x - iy$

De lo anterior sigue el corolario:

Corolario 5.6.3.

$p(\alpha) = 0 \Longrightarrow p(\overline{\alpha}) = 0$

En efecto

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$ entonces $p(\alpha) = 0$ o bien $p(x) \in ker(\varphi(\alpha))$; es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= p(\alpha) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \\ &\Downarrow \\ p(\overline{\alpha}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha}^i \\ &= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} \\ &= \overline{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{array}{rcl} p(\alpha) = 0 & \Longrightarrow & p(\overline{\alpha}) = 0 \\ & \Updownarrow & \\ p(x) \in ker(\varphi(\alpha)) & \Longrightarrow & p(x) \in ker(\varphi(\overline{\alpha})) \end{array}$$

Es decir, las raíces complejas aparecen en parejas.

Si asumimos el teorema fundamental del algebra y el algoritmo de la división, es decir:

Teorema 5.6.4.

Todo polinimio en $\mathbb{C}[x]$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Teorema 5.6.5.

Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces existen los polinomios $a(x)$ y $r(x)$ tal que

$$p(x) = a(x)q(x) + r(x) \qquad \delta(r(x)) < \delta(q(x))$$

entonces tenemos las siguientes conclusiones:

(1) Todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

(2) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces tenemos las únicas posibilidades:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x)(a_3 + b_3x)\cdots(a_s + b_sx) \text{ o bien} \\
p(x) &= (a_1 + b_1x + c_1x^2)(a_2 + b_2x + c_2x^2)(a_3 + b_3x + c_3x^2)\cdots(a_s + b_sx + c_sx^2) \\
&\ \text{donde } b_i^2 - 4a_ic_i < 0 \text{ o bien} \\
p(x) &= (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x)(a_3 + b_3x)\cdots(a_t + b_tx)\cdots \\
&= \cdots(a'_1 + b'_1x + c'_1x^2)(a'_2 + b'_2x + c'_2x^2)(a'_3 + b'_3x + c'_3x^2)\cdots(a'_s + b'_sx + c'_sx^2) \\
&\ \text{donde } b_i'^2 - 4a'_ic'_i < 0
\end{aligned}$$

(3) Si definimos en $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] - \{0\}$ la relación:

$$(p(x), q(x)) \cong (p'(x), q'(x)) \iff p(x)q'(x) = q(x)p'(x) \tag{223}$$

entonces (223) es una relación de equivalencia y escribiendo $(p(x), q(x)) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ podemos formar el conjunto de fracciones de polinomios, (recordar la construcción de los números racionales como fraciones de enteros):

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x) \in \mathbb{R}[x] \wedge q(x) \in \mathbb{R}[x] - \{0\} \right\}$$

Definición 5.6.6.

Diremos que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ es una fracción propia si y sólo si $\delta(p(x)) < \delta(q(x))$

Ejemplo 5.6.7.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2+1)}$ *es una fracción racional propia*

(2) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5}{(x^2 - 4)}$ *no es una fracción racional propia, pues:*

$$\delta(x^3 + 5) = 3 > \delta(x^2 - 4) = 2$$

En este caso podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{array}{lcccc} x^3+5 & : & (x^2-4) & = & x+1 \\ x^3-4x & & & & \\ \hline 4x+5 & & & & \end{array}$$

Luego,

$$\frac{x^3+5}{(x^2-4)} = \underbrace{(x+1)}_{\in \mathbb{R}[x]} + \underbrace{\frac{4x+5}{x^2-4}}_{propia}$$

Teorema 5.6.8.

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ *no es una fracción propia entonces existe un polinomio* $a(x)$ *y una fracción parcial propia* $u(x)$ *tal que* $f(x) = a(x) + u(x)$

En efecto

Aplicando el algoritmo de la división a los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, tenemos que existen polinomios $a(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$\begin{array}{ccl} p(x) & = & a(x)q(x) + r(x) \qquad \delta(r(x)) < \delta(q(x)) \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{p(x)}{q(x)} & = & \underbrace{a(x)}_{\in \mathbb{R}[x]} + \underbrace{\dfrac{r(x)}{q(x)}}_{\text{propia}} \end{array}$$

Lo que demuestra el teorema.

Finalmente, tenemos el siguiente resultado:

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, es una fracción propia en $\mathbb{R}(x)$ entonces tenemos los siguientes casos:

- $f(x)$ es una suma de fracciones propias del tipo $\dfrac{A_i}{a_i + b_i x}$, donde $i = 1, 2, \cdots s$ y $r \neq t \Longrightarrow a_r + b_r x \neq a_t + b_t x$

- $f(x)$ es una suma de fracciones propias del tipo $\dfrac{A_i}{a_i + b_i x}$, donde $i = 1, 2, \cdots s$ y existen términos del tipo, $a_i + b_i x$ repetidos.

- $f(x)$ es una suma de fracciones propias del tipo $\dfrac{A_i + B_i x}{a_i + b_i x + c_i x^2}$, donde $i = 1, 2, \cdots s$ y $r \neq t \Longrightarrow (a_r + b_r x + c_r x^2) \neq (a_t + b_t x + c_t x^2)$

- $f(x)$ es una suma de fracciones propias del tipo $\dfrac{A_i + B_i x}{a_i + b_i x + c_i x^2}$, donde $i = 1, 2, \cdots s$ y existen términos del tipo $a_i + b_i x + c_i x^2$, repetidos.

- $f(x)$ es una suma de fracciones propias de los dos tipos definidos encima.

Ejemplo 5.6.9.

(1) Si $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ entonces

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)} & = & \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} \\
 & = & \dfrac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\
 & \Downarrow & \\
x-1 & = & Ax - 3A + Bx - 2B \\
 & \Downarrow &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} A+B & = & 1 \\ -3A-2B & = & -1 \end{array}\right| \Longrightarrow B = 2 \wedge A = -1$$

5.7. Ejercicios Propuestos de Fracciones Parciales.

(1) Determine ”k” de forma que $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4kx - 2 \in ker(\varphi(2))$

(2) Determine las raíces de $p(x) = x^4 - 1$

(3) Descomponer en fracciones parciales sobre $\mathbb{R}$, los siguientes elementos de $\mathbb{R}(x)$

(a) $\dfrac{1}{x(x^3-1)}$

(b) $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}$

(c) $\dfrac{x^6}{(x^2-5x+6)(x-1)^3}$

(d) $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$

(e) $\dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)}$

(f) $\dfrac{x^4-5x^3+10x^2-8x-1}{(x-1)^3(x-2)}$

(g) $\dfrac{-3x-4}{(x-2)^2(x^2+1)}$

(h) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(i) $\dfrac{1}{(2x+1)(x+1)}$

(j) $\dfrac{1}{(2x+1)^2(x+1)}$

(k) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x}$

(l) $\dfrac{x-1}{x^3-x^2-2x}$

CAPITULO 6

Preliminares sobre Matemática Discreta

1. Contenidos

(1) Introducción

(2) El anillo de los Enteros

(3) Los enteros módulo n

(4) Los números primos

(5) Aplicaciones

2. Algoritmos Básicos

(1) A modo de introducción digamos que por " algoritmo entenderemos un conjunto de fórmulas que constituyen un método o procedimiento para calcular la solución de un problema aritmético".

(2) Sabemos que el conjunto de números enteros, es un anillo con las operaciones usuales de suma y producto y en el podemos definir una relación de Divisibilidad como sigue.

$$n\,R\,m \iff (\exists q; q \in \mathbb{Z}) : m = nq \tag{224}$$

Esta se denota $n \mid m$ y se lee "n divide m".

Ejemplo 2.0.1.

- $2 \mid 8$, pues $8 = 2 \cdot 4$
- $5 \mid 70$, pues $70 = 5 \cdot 14$
- $3 \not\mid 4$, pues no existe un entero q tal que $4 = 3 \cdot q$

Además posee las siguientes propiedades:

(1) $z \mid z \qquad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$, pues $z = z \cdot 1$, así que es reflexiva.

(2) Si $z_1 \mid z_2 \quad \wedge \quad z_2 \mid z_1$ entonces $z_1 = \pm z_2$

En efecto

$$\underbrace{\begin{array}{lcll} z_1 \mid z_2 & \Longleftrightarrow & z_2 = z_1 \cdot q_1 & (q_1 \in \mathbb{Z}) \\ z_2 \mid z_1 & \Longleftrightarrow & z_1 = z_2 \cdot q_2 & (q_2 \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = (z_1 \cdot q_1) \cdot q_2$$

$$\Downarrow$$

$$z_1(1 - q_1 q_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = 0 \quad \vee \quad q_1 q_2 = 1$$

Luego tenemos dos posibilidades:

- Si $z_1 = 0$ entonces $z_2 = 0$ y $z_1 = z_2$
- Si $z_1 \neq 0$ entonces $q_1 q_2 = 1$. Así que $(q_1 = q_2 = 1 \quad \vee \quad q_1 = q_2 = -1)$, en cualquier caso $(z_1 = z_2 \quad \vee \quad z_1 = -z_2)$

(3) Si $z_1 \mid z_2 \ \wedge \ z_2 \mid z_3$ entonces $z_1 \mid z_3$

En efecto

$$\left.\begin{array}{lcll} z_1 \mid z_2 & \Longleftrightarrow & z_2 = z_1 \cdot q_1 & (q_1 \in \mathbb{Z}) \\ z_2 \mid z_3 & \Longleftrightarrow & z_3 = z_2 \cdot q_2 & (q_2 \in \mathbb{Z}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad z_3 = z_1 \cdot (q_1 \cdot q_2) \Longrightarrow z_1 \mid z_3$$

Luego es transitiva

2.1. Algoritmo de la División.

Dados dos enteros n y m, la relación de divisibilidad esta ligada a la división usual de números que aprendimos en la enseñanza básica, pues en el formato antiguo

$$\begin{array}{rcl} n \mid m & \Longleftrightarrow & m = nq + r \quad \wedge \quad r = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} m \ : \ n \ = \ q \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Luego, en el proceso de división de dos enteros dados tenemos dos elementos relevantes, a saber:

- $\frac{m}{n} = q$ el cuociente entre m y n; en tal caso decimos que n es un divisor de m.
- r el resto de la división, cuya propiedad es $(0 \leq r < n)$.

Lo anterior motiva definir un procedimiento o algoritmo para dividir dos enteros, al cual llamaremos "**Algoritmo de la división**"

Etapa 1 Ingrese los enteros n y m.

Etapa 2 Sea $q = 0$ y $r = m$

Etapa 3 Si $r < n$ entonces escriba el cuociente es q y el resto es r, se decir, imprima

$$m = n \cdot q + r \tag{225}$$

Si no pase a Etapa 4

Etapa 4 Si $r \geq n$ entonces haga $r = (r - n)$ y $q = q + 1$ y vaya a la Etapa 3.

Ejemplo 2.1.1.

Etapa 1 Ingrese los números: $n = 7$ y $m = 33$

Etapa 2 Sea $q = 0$ y $r = 33$

Etapa 3 Si $r < n$ entonces escriba el cuociente es q y el resto es r, se decir, imprima

$$m = n \cdot q + r$$

Si no pase a Etapa 4

Etapa 4 $r = 33 > n = 7$ entonces $r = 33 - 7 = 26$ y $q = q + 1 = 1$

Etapa 4 $r = 26 > n = 7$ entonces $r = 26 - 7 = 19$ y $q = q + 1 = 2$

Etapa 4 $r = 19 > n = 7$ entonces $r = 19 - 7 = 12$ y $q = q + 1 = 3$

Etapa 4 $r = 12 > n = 7$ entonces $r = 12 - 7 = 5$ y $q = q + 1 = 4$

$$33 = 7 \cdot 4 + 5$$

Evidentemente este procedimiento es realmente lento, pues realiza tantos ciclos (vueltas) como cuocientes fueron escogidos, así que para números grandes estamos, "aproblemados con este procedimiento".

Sin embargo este procedimiento, nos permite probar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2.

Si m y n son enteros positivos entonces existen únicos enteros q y r tal que:

$$m = n \cdot q + r \qquad (0 \leq r < n) \tag{226}$$

En efecto

Observen que si $q = 0$ y $r = m$ entonces a medida que se realizan las vueltas tenemos los posibles "r":

r=m

Si $n \leq r$ entonces $r = m - n$

Si $n \leq r$ entonces $r = m - 2n$

Si $n \leq r$ entonces $r = m - 3n$....

Es decir tenemos la sucesión de números enteros:

$$m > m - n > m - 2n > m - 3n > ... \tag{227}$$

Y como los enteros que hay entre m y 0 son finitos, en algún instante la diferencia es menor que n y entonces el proceso concluye.

Para verificar la unicidad, supongamos que existiesen dos parejas de números cumpliendo las hipótesis del teorema, es decir

$$(m = nq + r \quad (0 \leq r < n)) \qquad \wedge \qquad (m = nq' + r' \quad (0 \leq r' < n)) \tag{228}$$

entonces

$$\begin{aligned}
nq + r = nq' + r' &\implies r - r' = n(q' - q)\\
\text{Si} \qquad r \geq r' &\implies 0 \leq (r - r') < n\\
&\implies 0 \leq n(q' - q) < n\\
\text{Como } n > 0 &\implies 0 \leq q' - q < 1\\
\text{Como } (q' - q) \text{ es un entero} &\implies q = q' \quad \wedge \quad r = r'
\end{aligned}$$

Lo que prueba el teorema.

2.2. Algoritmo Euclideano.

Este Algoritmo y su correspondiente teorema (justificación matemática) están ligados al concepto de **"máximo común divisor"**(m.c.d.).

Ejemplo 2.2.1.

Sea $m = 18$ y $n = 12$ entonces recordamos que s es un divisor de k si $s|k$ o equivalentemente el resto de la división r es 0, si denotamos por $div(k)$ al conjunto de divisores de k en $\mathbb{Z}$ entonces en este caso tenemos:

- $div(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 18\}$ y $div(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

- La "idea de común" aquí esta representada por la intersección de conjuntos, es decir:

$$div(18) \cap div(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

- La "idea de máximo" es como su nombre lo indica, el más grande del listado anterior, es decir:

$$(18, 12) = 6$$

De aquí que hacemos la definición de máximo común divisor como sigue:

Definición 2.2.2.

Si m y n son dos enteros positivos entonces el máximo común divisor de ellos es el mayor entero positivo d, que es divisor de ambos y lo notaremos por $(n,m)=d$, es decir:

$$(m,n)=d \iff \begin{array}{lllll} (i) & d|n & \wedge & d|m & \\ (ii) & d'|n & \wedge & d'|m \Longrightarrow d'|d \end{array} \tag{229}$$

Observación 2.2.3.

(1) En el caso del ejemplo (2.2.1), hicimos lo siguiente:

Etapa 1 Dividimos $m=18$ por $n=12$.

$$\begin{array}{ccccc} 18 & : & 12 & = & 1 \\ 12 & & & & \\ -- & & & & \\ 6 & & & & \end{array} \tag{230}$$

Etapa 2 Dividimos $m=12$ por $r=6$.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & : & 6 & = & 2 \\ 12 & & & & \\ -- & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \tag{231}$$

Etapa 3 De (230); $18=12\cdot 1+6$ y de (231); $12=6\cdot 2+0$, por tanto

$$18=6\cdot 2+6 \Longrightarrow \begin{array}{lllll} (i) & 6|12 & \wedge & 6|18 & \\ (ii) & d'|12 & \wedge & d'|18 \Longrightarrow d'|18-12=6 \end{array}$$

Ejemplo 2.2.4.

Sean $m=1234$ y $n=54$ entonces partimos con la idea de encima:

Etapa 1 Dividimos m por n.

$$\begin{array}{ccccc} 123'4' & : & 54 & = & 22 \\ 108 & & & & \\ -- & & & & \\ 154 & & & & \\ 108 & & & & \\ -- & & & & \\ 46 & & & & \end{array} \iff 1234=54\cdot 22+\underbrace{46}_{r_1}$$

Etapa 2 Dividimos $n=54$ por $r_1=46$.

$$\begin{array}{ccccc} 54 & : & 46 & = & 1 \\ 468 & & & & \\ -- & & & & \\ 8 & & & & \end{array} \iff 54=46\cdot 1+\underbrace{8}_{r_2}$$

Etapa 3 Dividimos $r_1 = 46$ por $r_2 = 8$.

$$\begin{array}{cccc} 46 & : & 8 & = & 5 \\ 40\,8 \\ -- \\ 6 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \quad 46 = 8 \cdot 5 + \underbrace{6}_{r_3}$$

Etapa 4 Dividimos $r_2 = 8$ por $r_3 = 6$.

$$\begin{array}{cccc} 8 & : & 6 & = & 1 \\ 6\,8 \\ -- \\ 2 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \quad 8 = 6 \cdot 1 + \underbrace{2}_{r_4}$$

Etapa 5 Dividimos $r_3 = 6$ por $r_4 = 2$.

$$\begin{array}{cccc} 6 & : & 2 & = & 3 \\ 6 \\ -- \\ 0 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \quad 6 = 2 \cdot 3 + \underbrace{0}_{r_5}$$

Etapa 6 $(1234, 54) = 2$

(2) Podemos intentar poner en un gráfico el procedimiento anterior:

(232)
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} 1234 & 54 & 46 & 8 & 6 & 2 \\ \hline 46 & 8 & 6 & 2 & 0 & \end{array}$$

(3) Finalmente, si realizamos el proceso en el sentido opuesto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 8 = 6 \cdot 1 + 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 = 8 - 6 \cdot 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = 8 - (46 - 8 \cdot 5) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = (54 - 46) - (46 - (54 - 46) \cdot 5) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = 54 \cdot 6 - 46 \cdot 7 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = 54 \cdot 6 - (1234 - 54 \cdot 22) \cdot 7 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = 1234 \cdot (-7) + 54 \cdot 160 \end{aligned}$$

Es decir, existen números enteros p y q tal que

$$2 \quad = \quad m \cdot \underbrace{(-7)}_{p} + n \cdot \underbrace{160}_{q} \tag{233}$$

Teorema 2.2.5. *(Algoritmo euclidiano)*

Sean n y m dos enteros con $n \leq m$ y considera una sucesión de números enteros $r_1, r_2, \ldots, r_s$ tal que:

$$\begin{array}{lcll} m & = & nq + r_1 & (0 \leq r_1 < n) \\ n & = & r_1 q_1 + r_2 & (0 \leq r_2 < r_1) \\ r_1 & = & r_2 q_2 + r_3 & (0 \leq r_3 < r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_{i-1} & = & r_i q_i + r_{i+1} & (0 \leq r_{i+1} < r_i) \end{array}$$

Si $r_1 = 0$ entonces $(m,n) = n$. Si $r_1 \neq 0$ existe $(s \in \mathbb{N})$ tal que $r_s = 0$ es el primer resto nulo y $(m,n) = r_{s-1}$. Más aún existen p y q dos enteros tales que:

$$(m,n) \quad = \quad mp + nq \tag{234}$$

En efecto

Caso 1 Si $r_1 = 0$ entonces $m = nq$ y $n|m$, luego $(m,n) = n$.

Caso 2 Si $r_1 \neq 0$ entonces tenemos que $n > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geq 0$. como el número de enteros entre n y 0 es finito entonces existe un primer s tal que $r_s = 0$, lo que muestra en particular que el algoritmo euclidiano para !!!.

Por otra parte, si $d|m$ y $d|n$ entonces $d|(m - nq) = r_1$, es decir un divisor de m y n es un divisor de n y r_1.

Reciprocamente, si $t|n$ y $t|r_1$ entonces $t|(nq + r_1) = m$, es decir t es un divisor de m y n

Si $r_2 = 0$ entonces $(m,n) = r_1$, si $r_2 \neq 0$ podemos mostrar como encima que los divisores de r_2 y r_1 son los mismos que los de r_1 y n y por tanto de m y n.

Iterando el proceso para los $r_i \neq 0$, tenemos que los divisores de r_i y r_{i-1} son los mismos que los divisores de m y n.

En fin, si $r_s = 0$ entonces $r_{s-1} = (r_{s-1}, r_{s-2}) = (m,n)$

Para concluir estudiemos el siguiente argumento:

$$\begin{array}{lcl} r_{s-3} & = & r_{s-2}q_{s-2} + r_{s-1} \\ r_{s-4} & = & r_{s-3}q_{s-3} + r_{s-2} \\ r_{s-5} & = & r_{s-4}q_{s-4} + r_{s-3} \\ r_{s-6} & = & r_{s-5}q_{s-5} + r_{s-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & = & nq + r_1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} r_{s-1} & = & r_{s-3} - r_{s-2}q_{s-2} \\ & = & r_{s-3} - (r_{s-4} - r_{s-3}q_{s-3})q_{s-2} \\ & = & (r_{s-5} - r_{s-4}q_{s-4}) - (r_{s-4} - (r_{s-5} - r_{s-4}q_{s-4})q_{s-3})q_{s-2} \\ & \vdots & \vdots \\ & = & mp + nq \end{array}$$

Definición 2.2.6.

Si $(m,n) = 1$ entonces decimos que m y n son primos relativos o coprimos.

2.3. Ejercicios Resueltos.

(1) Determine α y β tal que $(35,14) = 35\alpha + 14\beta$.

Solución:

Etapa 1.

$$35 = 14 \cdot 2 + 7$$

Etapa 2.

$$(35,14) = 7 = 35 \cdot (1) + 14 \cdot (-2)$$

(2) Si $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 1$ entonces demostremos que

$$(n, 2n+1) = 1$$

En efecto

$$\begin{aligned}
d|n \wedge d|(2n+1) &\Longrightarrow n = dr \wedge (2n+1 = ds) \\
&\Longrightarrow 2n+1 = 2dr+1 = ds \\
&\Longrightarrow 1 = ds - 2dr = d(s-2r) \\
&\Longrightarrow d|1 \\
&\Longrightarrow d = 1 \qquad \text{pues } n > 1
\end{aligned}$$

2.4. Ejercicios Propuestos.

(1) Para cada a y b, determine α y β tal que $(a,b) = a\alpha + b\beta$.

- a=252 y b=180
- a=6643 y b=2873
- a=272828282 y b=3242

(2) Verifique que

- $(2n+1, 3n+1) = 1$
- $(n!+1, (n+1)!+1) = 1$

(3) Sean $n > m$ dos enteros positivos. Muestre que si el resto de la división de n por m es r entonces el resto de la división de $2^n - 1$ por $2^m - 1$ es $2^r - 1$.

(4) Si $n > m$ calcule $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1)$

2.5. Preliminares sobre Los Números Primos.

Definición 2.5.1.

Un número entero p será llamado un número primo si $p \neq \pm 1$ y los únicos divisores de p son ± 1 y $\pm p$, es decir:

p es un número primo si y sólo si:

- $p \neq \pm 1$
- $q|p \Longrightarrow \begin{cases} q = \pm 1 \\ \vee \\ q = \pm p \end{cases}$

Ejemplo 2.5.2.

⋆ $p = 2$ es el único primo par

⋆ $p = 3$ es otro primo

⋆ $p = 47$ es primo

⋆ $p = 33$ no es primo, pues $33 = 3 \cdot 11$

Si $q \neq 1$ es un entero que no es primo entonces lo llamaremos compuesto.

⋆ Algunas Propiedades de Los Números Primos

Teorema 2.5.3.

Los números primos son no finitos.

En efecto,

- Supongamos que existe un número finito de primos.
- Entonces hay número primo p que es el mayor de todos.
- Podemos definir el número natural $q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p) + 1$; es decir, q es el producto de todos los primos menores o iguales a p más 1.
- Como p es el mayor y $q > p$ entonces q es un número compuesto
- Si q es compuesto entonces algún primo lo divide, pero los primos anteriores tienen resto 1 al dividir a q, luego existe un primo mayor que p que divide a q, lo cual es una contradicción.
- Conclusión los números primos son no finitos o infinitos.

Teorema 2.5.4.

Sean a, b, c tres enteros positivos entonces

$$a|(b \cdot c) \quad \wedge \quad (a, b) = 1 \quad \Longrightarrow \quad a|c \tag{235}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(a,b)=1 &\Longrightarrow (\exists m; m\in\mathbb{Z})(\exists n; n\in\mathbb{Z}) : am+bn=1 \quad \text{(Algoritmo de Euclides)}\\
&\Longrightarrow (\exists m; m\in\mathbb{Z})(\exists n; n\in\mathbb{Z}) : amc+bnc=c \quad \text{(Multiplicando por } c\text{)}\\
&\Longrightarrow a|c \qquad \text{Pues, Por hipótesis } a|(b\cdot c) \text{ y } a|a
\end{aligned}$$

Corolario 2.5.5.

Sea p un número primo y b, c números enteros positivos entonces

(236) $$p\,|(b\cdot c) \Longrightarrow p\,|b \quad \vee \quad p\,|c$$

En efecto

Supongamos que $p \not| \, b$ entonces como p es primo $(p,b)=1$. Así que el teorema (2.5.4) aplica literalmente, es decir

$$p\,|(b\cdot c)\wedge (p,b)=1 \Longrightarrow p|c$$

Teorema 2.5.6.

Sean a, b, c tres enteros positivos entonces

(237) $$(a,b)=1\wedge a|c\wedge b|c \Longrightarrow (a\cdot b)|c$$

En efecto

$$\left.\begin{aligned}
a|c &\Longleftrightarrow c=ar\\
b|c &\Longrightarrow b|ar\wedge (a,b)=1
\end{aligned}\right\} \overset{2.5.4}{\Longrightarrow} b|r \Longleftrightarrow r=bs$$
$$\Longrightarrow c=a(bs)$$
$$\Longrightarrow ab|c$$

Aplicación 2.5.7.

Si p es un primo positivo entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional.

En efecto

Supongamos que $\sqrt{p}$ es un racional, es decir, $\sqrt{p}=\dfrac{a}{b}$ tal que $(a,b)=1$ entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{p}=\frac{a}{b} &\Longrightarrow p=\frac{a^2}{b^2}\\
&\Longrightarrow p\cdot b^2=a^2\\
&\Longrightarrow p|a^2\\
&\Longrightarrow p|a \quad \text{(usando 2.5.5)}\\
&\Longrightarrow p\cdot b^2=p^2\cdot q^2\\
&\Longrightarrow b^2=p\cdot q^2\\
&\Longrightarrow p|b^2\\
&\Longrightarrow p|b\\
&\Longrightarrow (a,b)\neq 1 \text{ lo que contradice el hecho que } (a,b)=1
\end{aligned}$$

Por tanto, $\sqrt{p}$ es un irracional

Aplicación 2.5.8. *Teorema Fundamental de la Aritmética*

Dado un entero positivo $n \geq 2$, n se escribe de forma única como:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k} \tag{238}$$

donde, $(1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k)$ son números primos y $e_1, e_2, e_2, \ldots, e_k$ son enteros positivos.

En efecto

La demostración la haremos en dos partes; primero construiremos un algoritmo para mostrar la existencia de estos primos y después mostraremos la unicidad de la representación del número n.

- **Etapa 1:**

Dado el entero compuesto $n \geq 2$ formamos los conjuntos:

$$Men(n) = \{2, 3, 4, \ldots, n-1\} \quad \wedge \quad Div(n) = \{x \in Men(n) \mid x \mid n\} \tag{239}$$

Ejemplo 2.5.9.

Si $n = 140$ entonces

- $Men(140F) = \{2, 3, \ldots, 139\}$
- $Div(142) = \{2, 4, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

- **Etapa 2:**

Definimos $dmin(n)$ como el menor elemento del conjunto $Div(n)$

Ejemplo 2.5.10.

$dmin(142) = 2$

Lema 2.5.11.

$dmin(n)$ es primo.

En efecto

Sea $q > 1$ un divisor de $dmin(n)$.

$$\begin{aligned} q|dmin(n) \wedge dmin(n)|n &\Longrightarrow q|n \\ &\Longrightarrow q \in Div(n) \\ &\Longrightarrow dmin(n) \leq q \end{aligned}$$

Por otra parte, $q|dmin(n) \Longrightarrow q \leq dmin(n)$. Así que $dmin(n) = q$, de donde sigue por definición que $dmin(n)$, es un número primo.

- **Etapa 3:**

Calculamos o determinamos la cardinalidad o cantidad mínima de elementos del conjunto $Men(n)$, a fin de calcular $dmin(n)$

Lema 2.5.12.

Si $n > 1$ es un número compuesto entonces $dmin(n) \leq \sqrt{n}$

En efecto

$$\begin{aligned} dmin(n)|n &\Longrightarrow n = dmin(n) \cdot q \\ &\Longrightarrow q|n \\ &\Longrightarrow dmin(n) \leq q = \frac{n}{dmin(n)} \\ &\Longrightarrow (dmin(n))^2 \leq n \\ &\Longrightarrow dmin(n) \leq \sqrt{n} \end{aligned}$$

Conclusión 2.5.13.

Lo que hemos hecho hasta ahora, puede ser resumido como sigue: el algoritmo debe buscar un número que divida n, comenzando con 2 y avanzando hasta $\sqrt{n}$. Si n es compuesto el conjunto $Div(n)$ será no vacío y entonces encontraremos $dmin(n)$, el cual es un número primo. Si por el contrario $Div(n) = \emptyset$ entonces n es un número primo.

$\star$ Algortimo de Factorización

Entrada : Escriba un entero positivo n.

Salida : Escriba $dim(n) = f$ o n es primo.

Etapa 1 : Sea f=2

Etapa 2 : Si $\dfrac{n}{f}$ es un entero esciba "f es un factor de n", si no pase a **Etapa 3:**

etapa 3 : Sea f=f+1 y vaya a la **Etapa 4:**

Etapa 4 : Si $f > \sqrt{n}$ escriba n es primo y pare, si no vaya a la **Etapa 2:**

Ejemplo 2.5.14.

Sea $n = 450$

Aplicando el algoritmo observamos que $\dfrac{450}{2} = 225$ es un entero, Así que $dmin(450) = 2$ y volvemos a aplicar el algoritmo a $n = 225$. Para este nuevo n encontramos que $\dfrac{225}{3} = 75$ es un entero y $dmin(225) = 3$. Para el nuevo $n = 75$ tenemos que $\dfrac{75}{3} = 25$ y $dmin(75) = 3$. Finalmente:

$$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

2.6. Buscando Números Primos.

Mostraremos no demostraremos!!!, en este apartado una serie de resultados importantes en el desarrollo de La Teoría de Números, el objetivo es mostrarles una pincelada de esta maravillosa teoría.

(1) **Teorema de Wilson**

$$p \text{ es un número primo } \Longleftrightarrow p \mid ((p-1)!+1) \tag{240}$$

Ejemplos

- $(2-1)!+1 = 2 = 2\cdot 1 \Longrightarrow 2$ es un número primo
- $(3-1)!+1 = 3 = 3\cdot 1 \Longrightarrow 3$ es un número primo
- $(5-1)!+1 = 25 = 5\cdot 1 \Longrightarrow 5$ es un número primo
- $(7-1)!+1 = 721 = 7\cdot 103 \Longrightarrow 7$ es un número primo

(2) **La Criba de Eratóstenes**

Si n es un número compuesto entonces al menos uno de los factores primos de n es menor o igual a la raíz cuadrada de n.

Ejemplo

Si $n = 101$ entonces los primos menores que $\sqrt{101}$ son 2,3,5 y 7, de acuerdo a la criba, al menos uno de estos primos debería dividir a 101, pero como no es el caso sigue que 101 es un número primo.

(3) **Teorema de los números primos**

Si $\pi(n)$ representa la cantidad de números primos menores o iguales que n entonces

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n} \tag{241}$$

Algunos valores

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\ln n}$	$diferencia$	$error\%$
10^2	25	21	4	16.00
10^{10}	455.052.512	434.294.493	20.758.019	4.56
10^{15}	29.844.570.422.669	28.952.965.081228	891.605.341.441	2.99

(4) **Una mejor aproximación**

Si consideramos la fórmula

$$li(n) = n\sum_{i=1}^{k} \frac{(i-1)!}{(\ln n)^k}$$

entonces

$$\pi(n) \approx li(n)$$

Algunos valores

n	$\pi(n)$	$li(n)$	$diferencia$	$error\%$
10^2	25	111	86	344
10^{10}	455.052.512	455.055.600	3.088	0.000678
10^{15}	29.844.570.422.669	29.844.571.135, 055	712.386	0.000002

(5) **La fórmula** $F(j)$

Para cada $j > 1$ define $F(j) = \left[\cos^2\left(\pi\dfrac{(j-1)!+1}{j}\right)\right]$, donde los corchetes significa tomar la parte entera de la expresión. Así por ejemplo:

$[2.5] = 2$

$[2.99] = 2$

$[0.18] = 0$

$[0.99] = 0$

Es decir su gráfico es del tipo " escalera ".

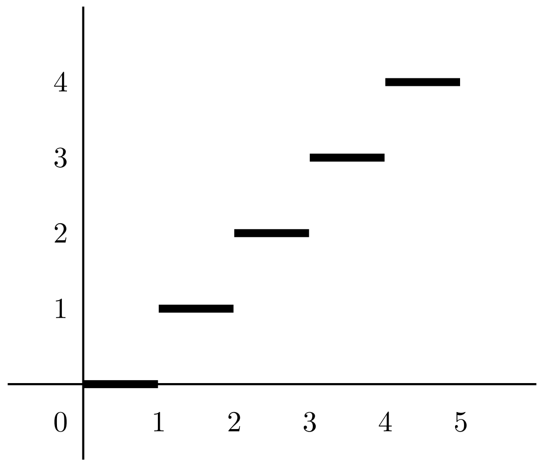


Figura 74

Para el caso de $F(j)$, aplicando el teorema de Wilson (240) más la parte entera tenemos el sorprendente resultado.

$$F(j) = \begin{cases} 1 & \text{j es primo} \\ 0 & \text{j compuesto} \end{cases} \tag{242}$$

Ejemplo

- $F(2) = \left[\cos^2 \pi \dfrac{(2-1)!+1}{2}\right] = [(-1)(-1)] = 1$
- $F(4) = \left[\cos^2 \pi \dfrac{(4-1)!+1}{4}\right] = \left[\cos^2 \dfrac{7\pi}{4}\right] = [0.05] = 0$

En particular, se obtiene la fórmula:

$$\pi(n) = \sum_{j=1}^{n} F(j) - 1 \tag{243}$$

2.7. Aritmética Modular.

(1) Dado un entero n sabemos que la relación $a \cong b \mod (n)$ es una relación de equivalencia, donde:

$$\begin{aligned} a \cong b \mod (n) &\iff (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : a - b = nr \\ &\iff (\exists r; r \in \mathbb{Z}) : a = nr + b \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.1.

- Si $n = 5$ entonces $a \cong b \mod (5) \Longleftrightarrow a = 5s + b \quad (s \in \mathbb{Z})$ y las clases de equivalencia son $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, pues los restos posibles al dividir por 5 son 0,1,2,3 y 4.
- Si $n = 8$ entonces las clases de equivalencia módulo 8 son $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

Definición 2.7.2.

Si $n \in \mathbb{Z}$ entonces llamaremos "Enteros módulo n" al conjunto:

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\} \tag{244}$$

Ejemplo 2.7.3.

- $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$
- $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

(2) Dotemos a $\mathbb{Z}_n$ con una estructura de anillo.

(a) Definamos la adición de clases como sigue:

$$\bar{n} + \bar{m} = \overline{n+m} \tag{245}$$

Ejemplo 2.7.4.

(i) Si $n = 5$ entonces

- $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} = \bar{1}$
- $\overline{-3} + \bar{43} = \bar{40} = \bar{0}$

(ii) Si $n = 12$ entonces

- $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}$
- $\overline{-3} + \bar{43} = \bar{40} = \bar{4}$

(b) Definamos el producto de clases como sigue:

$$\bar{n} \cdot \bar{m} = \overline{n \cdot m} \tag{246}$$

Ejemplo 2.7.5.

(i) Si $n = 5$ entonces

- $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$
- $\overline{-3} \cdot \bar{43} = -\bar{129} = \bar{1}$

(ii) Si $n = 12$ entonces

- $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$

- $\overline{-3} + \bar{4}3 = -\bar{1}29 = \bar{3}$

(3) Propiedades fundamentales en $\mathbb{Z}_n$

Recordemos que las unidades de un anillo son los elementos que poseen inverso en el anillo, en este caso, según la notación que hemos usado tenemos que:

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) \quad = \quad \{\bar{u} \in \mathbb{Z}_n \mid (\exists \bar{q} : \bar{q} \in \mathbb{Z}_n) : \overline{uq} = \bar{1}\} \tag{247}$$

Ejemplo 2.7.6.

- Si $n = 5$ entonces haciendo los cálculos módulo 5:

  (i) $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{1} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_5)$

  (ii) $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{2} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_5)$

  (iii) $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{3} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_5)$

  (iv) $\bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{16} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{4} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_5)$

  Luego,

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_5) \quad = \quad \mathbb{Z}_5 - \{\bar{0}\} \tag{248}$$

- Si $n = 8$ entonces haciendo los cálculos módulo 8:

  (i) $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{1} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_8)$

  (ii) $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{3} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_8)$

  (iii) $\bar{5} \cdot \bar{5} = \overline{25} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{5} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_8$

  (iv) $\bar{7} \cdot \bar{7} = \overline{49} = \bar{1} \Longrightarrow \bar{7} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_8$

  Luego,

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_8) \quad = \quad \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \tag{249}$$

De las relaciones (248) y (249) sigue que no todos los elementos no nulos del anillo de enteros módulo n $\mathbb{Z}_n$, tienen inverso, más aún en $\mathbb{Z}_8$ tenemos un comportamiento absolutamente diferente a $\mathbb{Z}_5$, observen:

$$\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{0} \qquad \text{(y ambos son no nulos módulo 8)}$$

Para resolver este punto podemos exhibir el siguiente teorema:

Teorema 2.7.7.

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) \quad = \quad \{\bar{u} \in \mathbb{Z}_n \mid (u, n) = 1\}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\bar{u} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) &\iff (\exists \bar{q} : \bar{q} \in \mathbb{Z}_n) : \bar{u} \cdot \bar{q} = \bar{1} \\
\bar{u} \cdot \bar{q} = \bar{1} &\iff n|(uq - 1) \\
n|(uq - 1) &\iff (\exists k :\in \mathbb{Z}) : uq - 1 = kn \\
uq + (-k)n = 1 &\iff (u, n) = 1
\end{aligned}$$

Corolario 2.7.8.

(250) $$\mathbb{Z}_n \text{ es un cuerpo } \iff n \text{ es primo}$$

2.8. Ejercicios Resueltos.

(1) **Algunos criterios de divisibilidad.**

Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que su representación en potencias de 10 es de la forma.

(251) $$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots + a_s \cdot 10^s$$

En (251) aplicamos congruencia módulo n y obtenemos lo siguiente:

(252) $$\bar{a} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{10} + \overline{a_2} \cdot \overline{10}^2 + \overline{a_3} \cdot \overline{10}^3 + \cdots + \overline{a_s} \cdot \overline{10}^s \qquad \bmod n$$

- Sea $n = 3$, como $10 \cong 1 \mod 3$ entonces la fórmula (252) se transforma en

$$\bar{a} = \overline{a_0} + \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \cdots + \overline{a_s} \qquad \bmod 3$$

Por tanto tenemos el " **Criterio de divisibilidad por 3** "

$$a \text{ es divisible por 3 } \iff (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_s) \text{ es divisible por 3}$$

Ejemplo 2.8.1.

4359999 es divisible por 3 pues $(4 + 3 + 5 + 9 + 9 + 9 + 9) = 48 = 3 \cdot 16$

- Sea $n = 11$, como $10 \cong (-1) \mod 11$ entonces

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot (-1) + \overline{a_2} \cdot (-1)^2 + \overline{a_3} \cdot (-1)^3 + \cdots + \overline{a_s} \cdot (-1)^s \qquad \bmod 11 \\
&= \overline{a_0} - \overline{a_1} + \overline{a_2} - \overline{a_3} + \cdots + \overline{a_s} \cdot (-1)^s
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos el " **Criterio de divisibilidad por 11** "

a es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus coeficientes es divisible por 11.

Ejemplo 2.8.2.

3443 es divisible por 11, pues $(3 - 4 + 4 - 3 = 0)$.

2.9. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine criterios de divisibilidad para $n = 2, 5, 7, 9$

(2) Determine si son reflejas, simétricas o transitivas las relaciones en $\mathbb{Z}$:

- $a \sim b \Longleftrightarrow (a, b) = 1$
- para $n \in \mathbb{Z}$ fijo $a \sim b \Longleftrightarrow (a, n) = (b, n)$

(3) Determine las unidades de los anillos $\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_6; \mathbb{Z}_9; \mathbb{Z}_{17}$

(4) Resuelva si es posible la ecuación

- $4x \cong 3 \mod 4$
- $3x + 2 \cong 0 \mod 4$
- $2x - 1 \cong 7 \mod 15$

(5) Determine $u \in \mathbb{Z}_{34}$ tal que todo elemento de $\mathbb{U}(Z_{34})$ es una potencia de u.

(6) Muestre que el cuadrado de cualquier entero sólo puede ser congruente a 0 o 1 módulo 4

(7) Use el ejercicio anterior para mostrar que si, x e y son enteros entonces $x^2 + y^2$ sólo puede ser congruente a 0, 1 o 2 módulo 4

(8) Use el ejercicio anterior para mostrar que, un entero de la forma $4n + 3$, no puede ser escrito como una suma de dos cuadrados de números enteros.

Contenidos

Bibliografía

[1] Bello, I. " Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Billeke, J. Bobadilla, G. " Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 1999.

[3] Fraleigh J. "algebra Abstracta" Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[4] Grimaldi, R. " Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[5] Gustafson, R. " Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[6] Kaufmann, J. " Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[7] Orellana A. "Apuntes de Algebra" Universidad de Santiago de Chile 1997

[8] Swokowski, E. " Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[9] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999