Introducción

**"Saber es poder
comprender es tolerar"**

La idea que me motiva a escribir estas notas esta sustentada en la firme creencia que, "una condición necesaria y suficiente para que en algún instante se produzca aprendizaje de algo es que, la intersección entre los deseos de enseñar del que enseña, y los deseos de aprender del que aprende, sea no vacía."

Lo anterior es con seguridad una muy difícil tarea, no obstante poseo la esperanza que estas notas ayudarán en parte, a generar la motivación en los actores para que ingresen a esa "intersección." Por esto espero que con estos apuntes se consiga al menos alguno de los siguientes objetivos.

Dar información introductoria y básica a los estudiantes de un primer curso de Álgebra.

Servir de hilo conductor para que los estudiantes recorran las primeras ideas algebraicas hasta llegar a las bases del algebra Lineal, y puedan posteriormente reflexionar, respecto de las ilimitadas aplicaciones que esta disciplina posee.

Generar un ambiente de diálogo permanente, entre el Profesor y el Estudiante del cual se concluya al menos que, "lo abstracto deja de serlo cuando se hace tangible en la mente, y se plasma a través de la mano."

Motivar al estudiante a profundizar día a día, cada uno de los tópicos discutidos en clases, usando la bibliografía de apoyo sugerida por su profesor, para que se concreten y conecten la teoría y la práctica.

Motivar al profesor, para que complemente estas notas, dándoles la contundencia y versatilidad necesaria para mantener vivo en el estudiante su interés por la asignatura.

Estas notas están distribuidas en dos tomos, en el primero de ellos se hace énfasis en estructuras algebraicas y en el segundo abordamos definitivamente temas de álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones más frecuentes.

Deseo enfatizar que desde hoy estas notas estarán en constante revisión con el único objetivo de mejorar y así llegar a ser alguna vez, un razonable material de apoyo, para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Este primer trabajo se realizó en el marco del proyecto de docencia **"Construcción de un libro de Álgebra para el primer año de Ingeniería Civil "** con el apoyo y financiamiento de la Vicerrectoría de Docencia y Extensión.

Finalmente debo agradecer el inestimable trabajo de la Profesora Gabriela Peñailillo, quien con esmero y dedicación corrigió y además propuso ideas en la construcción de estas notas.

Ricardo Santander Baeza

CAPITULO 1

Preliminares sobre Sistemas de Ecuaciones.

1. Objetivos

(1) Que el Estudiante este en condiciones de generalizar las técnicas para resolver sistemas de ecuaciones desarrolladas en sus estudios de Ensañanza Media.

1.1. Motivación.

(1) Consideremos el sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \tag{1}$$

(2) El sistema (1) puede ser escrito en forma matricial como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{B} \tag{2}$$

(3) Probablemente una de las primeras cuestiones que observamos es que un sistema como (1) o como (2), no tienen porque tener dos ecuaciones y tampoco dos incógnitas, es decir podemos tener en un arreglo como n ecuaciones y m "incógnitas". Así que podemos hacer nuestra primera "definición dupla"

Definición 1.1.1.

Llamaremos Sistema Lineal de n-ecuaciones y m-incógnitas a una expresión del tipo:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \tag{3}$$

Equivalentemente llamaremos notación matricial de (3) a la ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{4}$$

En fin, de ahora en adelante nos referiremos a un sistema lineal genérico poniendo

$$A \cdot X = B$$

donde A, X y B son como en (4)

Ejemplo 1.1.2.

Un sistema lineal de orden 3×4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 4y & + & z & + & w & = & 18 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & - & 2w & = & 24 \\ 3x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 4 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1.3.

El Departamento de pesca y caza del Estado proporcionatres tipos de comidas a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pes de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3. Cada semana se suministran al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 unidades del alimento 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento. ¿ Cúantos peces de cada especie pueden coexistir en el lago ?

Planteamiento del problema:

(a) *Sean*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \textit{cantidad de peces de la especie 1} \\ x_2 & = & \textit{cantidad de peces de la especie 2} \\ x_3 & = & \textit{cantidad de peces de la especie 3} \end{array}$$

(b) *De acuerdo a los datos del problema debemos tener que:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 25000 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 20000 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 55000 \end{array}$$

(c) *La solución la dejaremos pendiente hasta implementar una técnica "adecuada".*

Definición 1.1.4.

Diremos que Z es una solución del sistema (4). Si

(1) $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$

(2) $A \cdot Z = B$, *es decir*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nuestro problema es ahora determinar una estrategia para solucionar estos sistemas. Para ello estudiemos un sistema de tamaño 2.

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cccccc} (ec_1) & \text{x} & + & \text{2y} & = & 6 \\ (ec_2) & \text{3x} & \text{-} & \text{y} & = & 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & | & 6 \\ 3 & -1 & | & 4 \end{array}\right] \\
 & \\
ec_2 \longrightarrow ec_2 - 3ec_1 & L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\
 & \\
\begin{array}{cccccc} (ec_1) & \text{x} & + & \text{2y} & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & \text{-} & \text{7y} & = & \text{-14} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & -7 & | & -14 \end{array}\right] \\
 & \\
ec_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}ec_2 & L_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}L_2 \\
 & \\
\begin{array}{cccccc} (ec_1) & \text{x} & + & \text{2y} & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & + & \text{y} & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right] \\
 & \\
ec_1 \longrightarrow ec_1 - 2ec_2 & L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\
 & \\
\begin{array}{cccccc} (ec_1) & \text{x} & + & \text{0y} & = & 2 \\ (ec_2) & 0 & + & \text{y} & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right] \\
 & \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
 & \\
\begin{array}{ccc} \text{x} & = & 2 \\ \text{y} & = & 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Observación 1.1.5.

Las cuestiones más interesantes son:

(1) *El sistema se escribe naturalmente en forma matricial, aprovechando el producto de matrices.*

(2) *Basta operar sobre los coeficientes (números) de las variables del sistema y hacer abstracción de dichas variables.*

(3) *las operaciones permitidas para resolver el sistema son isomorfismos del grupo de matrices correspondiente.*

Teorema 1.1.6.

En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ *tenemos los siguientes isomorfismos:*

(1) *Permutación de filas:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ A & \longmapsto & L_r \longleftrightarrow L_s(A) \end{array} \tag{5}$$

Donde $(L_r \longleftrightarrow L_s)(A)$ *es igual que* A *salvo que tiene permutada la fila* r *con la fila* s

(2) *Ponderación de una fila por una constante no nula.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ A & \longmapsto & L_r \longleftrightarrow \alpha L_r(A) \end{array} \tag{6}$$

Donde $(L_r \longleftrightarrow L_s)(A)$ *es igual que* A *salvo que tiene multiplicada la fila* r *por la constante no nula* α

(3) *Adición de un múltiplo de una fila a otra fila.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ A & \longmapsto & L_r \longleftrightarrow L_r + \alpha L_s(A) \end{array} \tag{7}$$

Donde $(L_r \longleftrightarrow L_r + \alpha L_s)(A)$ *es igual que* A*, salvo que tiene la fila* r *sustituida por la fila* r *más* α *veces la fila* s*, con* $\alpha \neq 0$

La demostración de este teorema es un buen ejercicio.!!!

Ejemplo 1.1.7. *Si consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces como la "composición de isomorfismos" es un isomorfismo podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} (L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 16 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_2 \longrightarrow L_3 - 9L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 16 & 3 \\ 0 & -16 & 43 & -26 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo motiva hacer la siguiente definición:

Definición 1.1.8.

Las funciones definidas en (5), (6) y (7), las llamaremos "Operaciones Elementales de Matrices"

Observación 1.1.9.

En (1.1.7), podemos notar que:

(1) *La operación elemental* $(L_r \longleftrightarrow L_s)$*, nos permite trasladar a voluntad las filas de la matriz, como por ejemplo acumular, si las hubiera, las filas nulas (de puros ceros) en las filas inferiores (de abajo)de la matriz.*

(2) *La operación elemental* $(L_r \longleftrightarrow \alpha L_r)$*, nos permite crear unos (1) en cualquier posición de la matriz.*

(3) *La operación elemental* $(L_r \longleftrightarrow L_r + \alpha L_s)$*, nos permite crear ceros (0) en cualquier posición de la matriz.*

Ejemplo 1.1.10.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ *tal que*

$$a_{ij} = i \quad (1 \leq i \leq 4)(1 \leq j \leq 4)$$

entonces

$$A = (L_4 \longleftrightarrow L_4 - 4L_1) \circ (L_3 \longleftrightarrow L_3 - 3L_1) \circ (L_2 \longleftrightarrow L_2 - 2L_1)(A) = B$$

Donde,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, se puede usar la siguiente notación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_2 \longleftrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longleftrightarrow L_3 - 3L_1) \\ (L_4 \longleftrightarrow L_4 - 4L_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.11.

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ *entonces*

(1) *A será llamada "Matriz Escalonada Reducida por Filas" si:*

   (a) *Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros (filas nulas), aparecen bajo las filas no nulas.*

   (b) *En cualquier fila no nula, el primer elemento no nulo (partiendo de la izquierda) es un uno (1). A este elemento lo llamaremos el pivote de esa fila.*

   (c) *Si dos filas sucesivas son no nulas entonces el primer 1 en la fila de más abajo, esta más a la derecha que el primer 1 de la fila de encima.*

(d) *Si una columna contiene el pivote de un fila entonces es nula en todas las otras posiciones.*

(2) *A será llamada "Matriz Escalonada por Filas" si:*

(a) *Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros (filas nulas), aparecen bajo las filas no nulas.*

(b) *En cualquier fila no nula, el primer elemento no nulo (partiendo de la izquierda) es un uno (1). A este elemento lo llamaremos el pivote de esa fila.*

(c) *Si dos filas sucesivas son no nulas entonces el primer 1 en la fila de más abajo, esta más a la derecha que el primer 1 de la fila de encima.*

Ejemplo 1.1.12.

Cinco matrices en la forma escalonada reducida por filas.

$$\text{(i.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(v.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1.13.

Cinco matrices en la forma escalonada por filas. Note la diferencia con (1.1.12)

$$\text{(i.)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii.)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv.)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(v.)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.14.

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$. diremos que $A \cong B$ por filas si B es obtenida de A por un número finito de operaciones elementales.

Lema 1.1.15.

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces existe una única $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ tal que

(1) $A \cong B$ por filas

(2) B es una matriz escalonada por filas.

Definición 1.1.16.

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces llamaremos "*rango* " de la matriz A al número de filas no nulas de su correspondiente matriz escalonada.

La notación que usaremos para el rango de una matriz A será $\rho(A)$

Ejemplo 1.1.17.

Calculemos el $\rho(A)$ si A es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (L_2 \longrightarrow L_2 + L_1) \\ \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $\rho(A) = 2$

1.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Reducir a la forma escalonada por filas las matrices:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) Reducir a la forma escalonada reducida por filas las matrices del ejercicio (1)

(3) Calcular el rango de las matrices del ejercicio (2)

(4) Describa todas las posibles matrices de orden 2, que esten en la forma escalonada reducida por filas

(5) Demuestre que la relación definida en (1.1), es una relación de equivalencia

(6) Demuestre que toda matriz escalonada reducida por filas es una matriz escalonada por filas.

De un contraejemplo para mostrar que la recíproca es falsa.

2. Resolución de sistemas y Operaciones elementales

Consideremos un sistema lineal del tipo $n \times m$, es decir:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \tag{8}$$

Entonces de acuerdo a lo estudiado podemos, considerar las siguientes etapas para nuestro algoritmo:

Etapa 1. Ponemos (8) en notación matricial, es decir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{9}$$

Etapa 2. Ya observamos que lo que interesa para resolver el sistema son los coeficientes de las variables e incluso podemos hacer abstracción de ellas, es decir definimos una nueva matriz que contenga toda la información numérica del sistema para ello hacemos la siguiente equivalencia:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & | & b_n \end{pmatrix}$$

A estas alturas conviene hacer una definición para bautizar a esta nueva matriz:

Definición 2.0.1.

Llamaremos "Matriz Ampliada" asociada al sistema (9) ó al sistema (8) a la matriz

$$(A|B) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & | \quad b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & | \quad b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & | \quad b_n \end{array} \right) \tag{10}$$

Ejemplo 2.0.2.

Consideremos el sistema lineal de orden 2×4:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{x} & + & 2\text{y} & + & \text{z} & + & \text{t} & = & 0 \\ \text{x} & + & 3\text{y} & - & \text{z} & + & 2\text{t} & = & 0 \end{array} \tag{11}$$

Entonces

(1) La notación matricial para (11), es dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) La matriz ampliada asociada es:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & | & 0 \end{array} \right]$$

Etapa 3. Calculamos $\rho(A|B)$, el rango de la matriz ampliada entonces tenemos calculados en realidad dos rangos, a saber:

(i) El propio $\rho(A|B)$ y

(ii) $\rho(A)$, para lo cual basta mirar la matriz escalonada reducida por filas asociada a $(A|B)$ eliminando la última columna.

Una conclusión inmediata es que

$$\rho(A) \leq \rho(A|B) \tag{12}$$

Pues, una fila no nula de A es una fila no nula de $(A|B)$

Caso 1 $\rho(A) < \rho(A|B)$ entonces de acuerdo a nuestra equivalencia, (10), tenemos que debería suceder al menos una situación como la siguiente (despues de escalonar por supuesto):

$$(A|B) \quad \cong \quad \left(\begin{array}{ccccc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} & | \quad b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2m} & | \quad b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{(n-1)1} & a'_{(n-1)2} & \dots & a'_{(n-1)m} & | \quad b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | \quad b'_n \end{array} \right) \tag{13}$$

donde $b'_n \neq 0$, lo cual implicaría que

$$0 \cdot x_m = b_n \qquad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

Así que, tenemos en general que

$$\rho(A) \neq \rho(A|B) \implies (\ 8) \text{ no tiene solución} \tag{14}$$

Caso 2 $\rho(A) = \rho(A|B)$ entonces aplicando nuestra equivalencia (10), a la matriz escalonada reducida por filas obtenida de la matriz $(A|B)$, tenemos al menos una solución.

En fin tenemos el siguiente teorema o herramienta de trabajo:

Teorema 2.0.3. (**Teorema del rango)**

Un sistema lineal del tipo $AX = B$, como (9), tiene solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A|B)$, donde $(A|B)$ representa la matriz ampliada asociada al sistema. ver (10)

Corolario 2.0.4.

Supongamos que $\rho(A) = \rho(A|B)$ en (2.0.3) entonces

Caso 1 *Si $\rho(A) = m$ entonces el sistema tiene solución única o*

Caso 2 *Si $\rho(A) < m$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

En efecto
Si existe un pivote en cada una de las n filas tenemos, por definición de matriz escalonada reducida por filas que, existe una única solución.

Caso contrario existen r pivotes donde $r < m$ y bastan r variables para determinar las m variables; usualmente al número $m - r$ se le llama ”Grado de Libertad del Sistema”

Ejemplo 2.0.5.

Retomemos el ejemplo (1.1.3) entonces

(1) Partimos considerando el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 25000 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 20000 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 55000 \end{array}$$

(2) Pasamos el sistema a la notación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25000 \\ 20000 \\ 55000 \end{bmatrix}$$

(3) Ampliamos el sistema, es decir construimos la matriz:

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55000 \end{bmatrix}$$

(4) Calculamos $\rho(A|B)$, es decir debemos reducir por filas a la matriz $(A|B)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25000 \\ 1 & 4 & 1 & 20000 \\ 2 & 5 & 5 & 55000 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c}(L_2 \longrightarrow L_2 - L_1)\\(L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1)\end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & -1 & 1 & 5000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}(L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_2)\\(L_3 \longrightarrow L_3 + L_2)\end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(5) Ahora comparamos los rangos para verificar las *hipótesis del teorema y corolario.*

(i) $\rho(A|B) = \rho(A) = 2$. Así que existe solución para el problema de administración de recursos.

(ii) Como $\rho(A|B) = \rho(A) = 2 < 3$ entonces existen infinitas soluciones

(6) Ahora determinamos las soluciones aplicando nuestra equivalencia (10) es decir traducimos al sistema:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 40000 - 5x_3 & \quad (1) \\ x_2 & = & -5000 + x_3 & \quad (2) \end{array}$$

Probablemente un problema teórico terminaría aquí, pero este es un problema práctico y real así hay que estudiar las posibilidades o restricciones:

- Es claro que la restricción más elemental debe ser que

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \tag{15}$$

- De la ecuación (2) $x_3 = x_2 + 5000$ y de $x_2 \geq 0$ sigue que

$$x_3 \geq 5000 \tag{16}$$

- Como $x_1 \geq 0$ y $40000 - 5x_3 = x_1$ entonces

$$x_3 \leq 8000 \tag{17}$$

Luego para concluir las soluciones teóricas posibles son del tipo:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 40000 - x_3 \\ x_3 - 5000 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x_3 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- Aplicando las restriciones obtenidas tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5000 \leq x_3 \leq 8000)$$

No obstante esta sea una buena descripción de las posibilidades, lamentablemente ninguna especie de peces tiene como miembro una mitad de pez, así que la soluciones son a lo más 3001, pues como dicho, x_3 tiene que ser entero y $x_1 \leq 15000$, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; (5000 \leq x_3 \leq 8000 \quad \wedge \quad x_3 \in \mathbb{Z}) \tag{18}$$

2.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Resolver los siguientes sistemas usando el Teorema del Rango:

(a) $\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right|$

(b) $\left.\begin{array}{cccccccc} \text{x} & + & \text{y} & + & \text{z} & = & 4 \\ \text{2x} & + & \text{5y} & - & \text{2z} & = & 3 \end{array}\right|$

(c) $\begin{array}{cccccc} \text{x} & + & \text{y} & = & 4 \\ \text{2x} & - & \text{3y} & = & 7 \\ \text{3x} & + & \text{2y} & = & 8 \end{array}$

(d) $\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right|$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right|$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right|$$

(g)
$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

(2) Considere el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & b \\ -5x_1 & - & 5x_2 & + & 21x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos

- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución } \}$
- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ no tiene solución } \}$

(3) Considere el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & b \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos

- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución } \}$
- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ no tiene solución } \}$

(4) Considere el sistema lineal $AX = B$, de orden 3

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Demuestre que $(\star)$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(5) Considere el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 5y & + & 12z & - & w & = & -3 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & - & 2w & = & -12 \\ & & 6y & + & 6z & + & 3w & = & 15 \\ & & & & 2z & + & k(k+1)w & = & 9k \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los siguientes conjuntos:

- $S_1 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \textit{ tiene } \text{solución}\}$
- $S_2 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \textit{ no tiene } \text{solución}\}$
- $S_3 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \textit{ tiene } \text{solución única}\}$

(6) Fueron estudiados tres tipos de alimentos. Fijada la misma cantidad (1gr), se determino que:

(a) El alimento I tiene 1 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.

(b) El alimento II tiene 2 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 5 unidades de vitamina C.

(c) El alimento III tiene 3 unidad de vitamina A, no tiene vitamina B y tiene 3 unidades de vitamina C.

Si se necesitan 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B y 20 de vitamina C.

(a) Determine las posibles cantidades de alimentos I, II y III que contienen la cantidad de vitaminas deseadas.

(b) Si el alimento I cuesta 600 pesos por gramo y los otros dos cuestan 100 por gramo,¿ existe una solución del sistema cuyo costo sea 10000 pesos ?

(7) Un sistema lineal del tipo $AX = B$ se llama sistema homogeneo si B=(0). Demuestre que un sistema homogeneo tiene siempre solución.

(8) *El modelo de insumo-producto de Leontief* para un sistema económico, puede ser relatado como sigue:

(a) Existe n industrias

(b) Existen dos tipos de demandas en cada industria: una demanda externa (proviene desde fuera del sistema) y otra demanda interna (demanda entre las industrias).

(c) Supongamos que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria y suponga tambien que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria.

(d) Sea x_i la producción de la industria i y supongamos que la producción de cada industria es igual a su demanda.

entonces para calcular por ejemplo la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Así $a_{21}x_1$ es la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. Luego la demanda interna total sobre la industria 2 es $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i$, además la demanda total sobre la industria 2 será $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i + e_2$.

Igualando la demanda total a la producción de cada industria obtenemos el sistema de Insumo-Producto de Leontief (I-P).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & e_1 & = & x_1\\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & + & e_2 & = & x_2\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & + & e_n & = & x_n
\end{array} \tag{19}
$$

Equivalentemente

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(1-a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \cdots & - & a_{1n}x_n & = & e_1\\
-a_{21}x_1 & + & (1-a_{22})x_2 & - & \cdots & - & a_{2n}x_n & = & e_2\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
-a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - & \cdots & - & (1-a_{nn})x_n & = & e_n
\end{array} \tag{20}
$$

Resuelva el sistema (I-P) si : $e_1 = 10$; $e_2 = 15$; $e_3 = 30$; $a_{11} = \frac{1}{3}$; $a_{12} = \frac{1}{2}$; $a_{13} = \frac{1}{6}$; $a_{21} = \frac{1}{4}$; $a_{22} = \frac{1}{4}$; $a_{23} = \frac{1}{8}$; $a_{31} = \frac{1}{12}$; $a_{32} = \frac{1}{3}$; $a_{33} = \frac{1}{6}$

(9) Un método muy conocido para resolver sistemas lineales aunque con fuertes restricciones es el *Método de Cramer* el cual se basa en los siguientes hechos:

(a) El sistema debe ser cuadrado, es decir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y A debe ser invertible, entonces tenemos

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}
$$

Y,

$$
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix} \tag{21}
$$

(b) Pero,

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}
= \frac{1}{\det A}
\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{adjunta de } A}
$$

Luego, sustituyendo en (21), tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_t = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{tj} b_j \qquad (t = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_t = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underbrace{b_n}_{\text{columna t}} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Resuelva usando el método de Cramer los siguientes sistemas:

(1) $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & -1 \\ -7x_1 & + & 4x_2 & = & 47 \end{array}$

(2) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ 8x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \end{array}$

(3) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$

(4) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$

(5) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 7 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ 4x_1 & - & x_2 & & & & & = & -3 \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 2 \end{array}$

(6) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ & & x_1 & & & - & x_4 & = & 5 \end{array}$

(7) Considere el triángulo de la figura

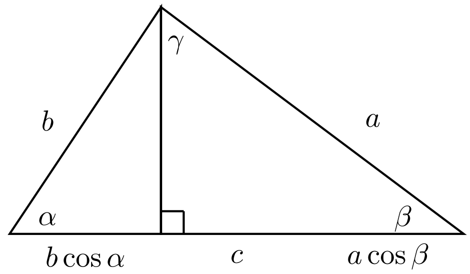

Figura 1

(a) Demuestre usando trigonometría que

$$
\begin{array}{ccccccc}
c\cos\alpha & & & + & a\cos\gamma & = & b \\
b\cos\alpha & + & a\cos\beta & & & = & c \\
& & c\cos\beta & + & b\cos\gamma & = & a
\end{array} \tag{22}
$$

(b) Interprete (22), como un sistema de ecuaciones en las variables, $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$, y demuestre que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

(c) Utilice la regla de Cramer para despejar $\cos\gamma$

(d) Demuestre la Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

3. Aplicaciones

3.1. Factorización LU.

Considera un sistema clásico de la forma $A \cdot X = B$ tal que $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es una matriz triangular superior invertible, es decir:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{23}
$$

tal que $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

Así que, podemos resolver el sistema, (23) iteradamente, como sigue:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}} \\ &\vdots \\ x_s &= \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=s+1}^{n} a_{si}x_i}{a_{ss}} \end{aligned}$$

Luego,

$$x_s = \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=n}^{s-1} a_{si}x_i}{a_{ss}} \quad (s = n, n-1, \ldots, 2) \tag{24}$$

Un comportamiento análogo, obtenemos si, $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es una matriz triangular inferior invertible, pues en este caso:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

tal que $c_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$

Y,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{c_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - c_{21}x_1}{c_{22}} \\ &\vdots \\ x_s &= \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} c_{si}x_i}{a_{ss}} \end{aligned}$$

Luego,

$$x_s = \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} c_{si}x_i}{a_{ss}} \quad (s = 2, 3, \ldots, n) \tag{26}$$

Ejemplo 3.1.1.

Resolver el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & & & & & = & 10 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 28 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 26 \end{array}\right|$$

Solución

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{5} = 2 \\ x_2 &= \frac{28 - 4x_1}{-2} = -10 \\ x_3 &= \frac{26 - 2x_1 - 3x_2}{4} = 13 \end{aligned}$$

Observación 3.1.2.

Considera un sistema clásico de la forma $A \cdot X = B$ tal que

(1) $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

(2) $A = L \cdot U$, *donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.*

entonces

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\iff (L \cdot U) \cdot X = B \\ &\Longrightarrow L \cdot \underbrace{(U \cdot X)}_{Z} = B \\ &\Longrightarrow L \cdot Z = B \end{aligned}$$

Así que;

Etapa 1. *Usando la fórmula (26) calculamos Z*

Etapa 2. *Usando la fórmula (24) calculamos X*

Ejemplo 3.1.3.

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|}
6x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\
3x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & -4 \\
-12x_1 & + & 8x_2 & + & 21x_3 & - & 8x_4 & = & 8 \\
-6x_1 & & & - & x_3 & + & 7x_4 & = & -43y \\
\hline
\end{array} \tag{27}$$

y para la matriz A de coeficientes del sistema (27),

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix} \tag{28}$$

usemos la descomposición LU (verifiquelo!!);

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Y

$$U = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{30}$$

entonces (27), se escribe como sigue:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Y lo resolvemos como sigue:

Etapa 1.

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Etapa 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_2 &= -4 - \frac{1}{2}z_1 = -5 \\ z_3 &= 8 + 2z_1 + 2z_2 = 2 \\ z_4 &= -43 + z_1 - z_2 + 2z_3 = -32 \end{aligned}$$

Etapa 3.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-32}{8} = -4 \\ x_3 &= \frac{2 + 2x_4}{5} = -1.2 \\ x_2 &= \frac{-5 + 4x_3 + x_4}{-2} = 6.9 \\ x_1 &= \frac{2 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4}{6} = 4.5 \end{aligned}$$

3.2. Ejercicios Propuestos.

Resuelva los sistemas lineales $AX = B$ y $A = LU$ si:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -36 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -16 \\ -66 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

CAPITULO 2

Espacios Vectoriales

1. Objetivos

(1) Construir un ambiente suficientemente amplio, donde se puedan modelar situaciones prácticas.
(2) Desarrollar técnicas que permitan controlar rápida y eficientemente una gran cantidad de información
(3) Mostrar la equivalencia entre el ambiente teórico y práctico.

2. Motivación

Consideremos el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo, es decir el conjunto de puntos de la forma

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \tag{31}$$

Es decir,

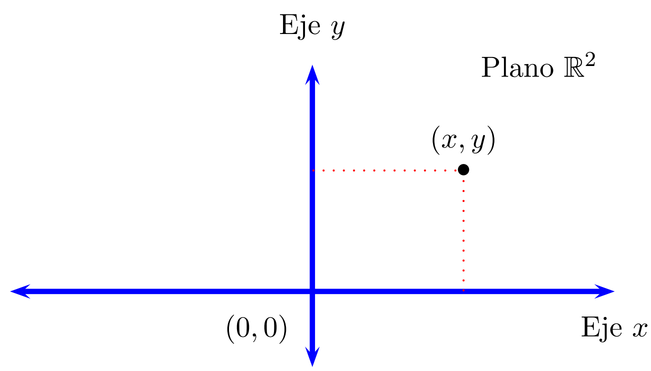

Figura 2 : Plano Cartesiano

De la figura observamos que:

(1) El eje x y el eje y, son dos líneas rectas.

(2) Como conjunto podemos describirlos como:

$$\text{Eje } x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

$$\text{Eje } y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

Así que;

$$\text{Eje } x = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{32}$$

(33) $$\text{Eje } y = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

(3) Si aceptamos los principios

- **"Una línea recta es un punto en movimiento "** (Euclides)
- **"para pertenecer a un conjunto hay que ser igual a un miembro de ese conjunto "**

entonces

(34) $$v \in \text{ Eje } x \Longleftrightarrow [\exists\, x_0; x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } v = (x_0, 0)]$$

Observen que (34), dice por ejemplo que $v = (1,0)$ pertenece al Eje x al igual que $v = (33,0)$.

(4) Supongamos que $v \in$ Eje x entonces (34), puede ser expresado matemáticamente como:

$$\begin{aligned} v \in \text{ Eje } x &\Longleftrightarrow [\exists\, x_0; x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } v = (x_0, 0)] \\ &\Longleftrightarrow v = (x_0 \cdot 1, x_0 \cdot 0) \end{aligned}$$

Si además hacemos:

$$(x_0 \cdot 1, x_0 \cdot 0) = x_0 \cdot (1,0)$$

entonces para determinar $v = (33,0)$, por ejemplo, simplemente necesitamos mover al elemento $e_1 = (1,0)$ a través del Eje x, 33 unidades.

Así (34), puede ser expresada como sigue:

Los elementos del Eje x son múltiplos de $\mathbf{e_1}$

Lo cual en Lenguaje Matemático se traduce como:

(35) $$v \in \text{ Eje } x \Longleftrightarrow [\exists\, x_0; x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } v = x_0 \cdot e_1]$$

Análogamente,

(36) $$u \in \text{ Eje } y \Longleftrightarrow [\exists\, y_0; y_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } u = y_0 \cdot e_2]$$

donde $e_2 = (0,1)$

Conclusión 2.0.1.

Si notamos

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) \tag{37}$$

y

$$\langle (x,y) \rangle = \{\alpha \cdot (x,y) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{38}$$

entonces

(1) $\langle e_1 \rangle =$ Eje x y $\langle e_2 \rangle =$ Eje y

(2) $\langle (x,y) \rangle$ es una recta que pasa por el origen. ¿ Cuál ?

(3) Recíprocamente, dado $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ entonces

- Existe una única recta, digamos L que pasa por el origen y $P \in L$
- Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P = \alpha \cdot (x,y)$ (basta tomar $\alpha = 1$)

Lo anterior puede ser formalizado definiendo la siguiente **función**:

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,(x,y)) & \longmapsto & (u \cdot x, u \cdot y) \end{array} \tag{39}$$

Ejemplo 2.0.2.

(1) $3 \cdot (1,2) = (3,6)$

(2) $(-1) \cdot (1,2) = (-1,-2)$

(3) Gráficamente tenemos:

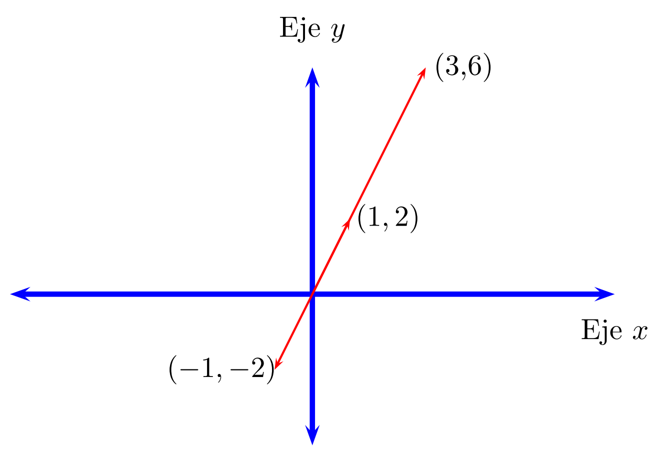

Figura 3

Observación 2.0.3.

(1) Sabemos del capitulo de grupos que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano

(2) Además podemos ver directamente de la definición que;

$$(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R}); (\forall \beta; \beta \in \mathbb{R}); (\forall u; u \in \mathbb{R}^2); (\forall v; v \in \mathbb{R}^2); (\forall w; w \in \mathbb{R}^2)$$

valen las siguientes propiedades de compatibilidad entre las operaciones,

- $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

- $(\lambda + \beta) \cdot u = \lambda \cdot u + \beta \cdot u$

- $1 \cdot u = u$

- $\lambda \cdot u = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \vee u = 0$

De ahora en adelante la cuarteta $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$, será llamada un $\mathbb{R}$ - Espacio Vectorial y sus elementos se llamarán vectores y será nuestro **Prototipo**.

3. Definición y Ejemplos de espacios vectoriales

Un conjunto V será un Espacio Vectorial si puede emular el comportamiento de $\mathbb{R}^2$

Formalmente se expresa a través de la siguiente.

Definición 3.0.4. *Un conjunto, digamos $\mathbb{V}$ será llamado un $\mathbb{K}$ - Espacio Vectorial si*

(1) $\mathbb{V} \neq \phi$

(2) $\mathbb{V}$ *admite una operación interna, digamos " + "; definida por*

$$\begin{array}{rcccc} + & : & \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \tag{40}$$

tal que (40) satisface las propiedades:

$(\forall u; u \in \mathbb{V}); (\forall v; v \in \mathbb{V}); (\forall w; w \in \mathbb{V})$, *tenemos*

- $u + (v+w) = (u+v) + w$ *(asociatividad de +)*

- *Existe* $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ *talque* $u + 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} + u = u$ *(neutro de +)*

- *Para cada* u, $u + (-u) = -u + u = 0_{\mathbb{V}}$ *(inverso de +)*

- $u + v = v + u$ *(conmutatividad de +)*

Así, $(\mathbb{V}, +)$ *es un grupo Abeliano o conmutativo.*

(3) $\mathbb{V}$ *admite una operación externa, digamos "·"; definida por*

$$\begin{array}{rcccc} \cdot & : & \mathbb{K} \times \mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array} \tag{41}$$

Donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo y (41) satisface las propiedades:

$(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K}); (\forall \beta; \beta \in \mathbb{K}); (\forall u; u \in \mathbb{V}); (\forall v; v \in \mathbb{V}); (\forall w; w \in \mathbb{V})$, *tenemos que*

- $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

- $(\lambda + \beta) \cdot u = \lambda \cdot u + \beta \cdot u$
- $(\lambda \cdot \beta) \cdot u = \lambda \cdot (\beta \cdot u)$
- $1 \cdot u = u$
- $\lambda \cdot u = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \vee u = 0_{\mathbb{V}}$

Ejemplo 3.0.5. **El conjunto de n-uplas**, $\mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$

(1) *Descripción del Conjunto*

$$\mathbb{V} := \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n\} \wedge n \in \mathbb{N}$$

(2) *Igualdad en* $\mathbb{R}^n$

$$\text{Sea } u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \text{ y } v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$u = v \Longleftrightarrow u_i = v_i \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n)$$

(3) *Operación Interna*

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ & ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{array}$$

Observen que:

- $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ *es el elemento neutro aditivo.*
- *Si* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *entonces* $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ *es el inverso aditivo de* x.

(4) *Operación Externa*

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ & (r, (x_1, \dots, x_n)) & \longmapsto & (rx_1, \dots, rx_n) \end{array}$$

Observen que:

$$\begin{array}{rcl} r[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] & = & r(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ & = & (r(x_1 + y_1), \dots, r(x_n + y_n)) \\ & = & (rx_1 + ry_1), \dots, rx_n + ry_n) \\ & = & (rx_1, \dots, rx_n) + (ry_1, \dots, ry_n) \\ & = & r(x_1, \dots, x_n) + r(y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (rx_1, \dots rx_n) = 0_{\mathbb{R}^n} & \Longleftrightarrow & rx_i = 0 \; (1 \leq i \leq n) \\ & \Longrightarrow & r = 0 \vee x_i = 0 \; (1 \leq i \leq n) \\ & \Longrightarrow & r = 0 \vee (x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{array}$$

(5) *Después que haya comprobado todas las otras propiedades concluirá que* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un genuino* $\mathbb{R}$ *- Espacio Vectorial.*

Ejemplo 3.0.6. **El conjunto de Matrices** $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{N}$,

(1) *Descripción del Conjunto*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) = \{(a_{ij}) \,|\, a_{ij} \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$$

(2) *Igualdad en* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$

Sea $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ *y* $(b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ *entonces*

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n); (\forall j; 1 \leq j \leq m)$$

(3) *Operación Interna*

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ & & ((a_{ij}), (b_{ij})) & \longmapsto & (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

Observen que:

- $0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)} = (0)$ *es el elemento neutro aditivo.*
- $A = (a_{ij}) \Longrightarrow -A = (-a_{ij})$ *es el inverso aditivo de* A.

(4) *Operación Externa*

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m) \\ & & (r, (a_{ij})) & \longmapsto & r \cdot (a_{ij}) = (ra_{ij}) \end{array}$$

Observen que:

$$\begin{array}{rcl} r \cdot [(a_{ij}) + (b_{ij})] & = & r \cdot (a_{ij} + b_{ij}) \\ & = & (r \cdot a_{ij} + r \cdot b_{ij}) \\ & = & (r \cdot a_{ij}) + (r \cdot b_{ij}) \\ & = & r \cdot (a_{ij}) + r \cdot (b_{ij}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} r \cdot (a_{ij}) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)} & \Longleftrightarrow & (r \cdot a_{ij}) = (0) \\ & \Longrightarrow & r \cdot a_{ij} = 0 \; (1 \leq i \leq n) \; (1 \leq j \leq m) \\ & \Longrightarrow & r = 0 \vee a_{ij} = 0 \; (1 \leq i \leq n) \; (1 \leq j \leq m) \\ & \Longrightarrow & r = 0 \vee (a_{ij}) = (0) \end{array}$$

(5) *Así,* $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m), +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un* $\mathbb{R}$ *- Espacio Vectorial.*

Ejemplo 3.0.7. **Los Polinomios de grado** $\leq n$ **con coeficientes reales**, $\mathbb{R}_n[x]$

(1) *Descripción del Conjunto*

$$\mathbb{R}_n[x] = \left\{ a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, (0 \leq i \leq n) \right\}$$

(2) *Igualdad en* $\mathbb{R}_n[x]$

Sea $a(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ *y* $b(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ *entonces*

$$a(x) = b(x) \Longleftrightarrow a_i = b_i \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n)$$

(3) *Operación Interna*

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] & \longmapsto & \mathbb{R}_n[x] \\ & & (a(x), b(x)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \end{array}$$

Observen que:

- $0_{\mathbb{R}_n[x]} = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$ *es el elemento neutro aditivo.*
- $-a(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i$ *es el inverso aditivo de* $a(x)$

(4) *Operación Externa*

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[x] & \longmapsto & \mathbb{R}_n[x] \\ & & (r, a(x)) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} (r \cdot a_i)x^i \end{array}$$

Observen que:

$$\begin{aligned} r \cdot [a(x) + b(x)] &= r \cdot \sum_{i=0}^{n} [a(x) + b(x)]x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} [r \cdot a(x) + r \cdot b(x)]x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} r \cdot a(x)x^i + \sum_{i=0}^{n} r \cdot b(x)x^i \\ &= r \cdot a(x) + r \cdot b(x) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} r \cdot a(x) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} &\iff \sum_{i=0}^{n} r \cdot a_i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i \\ &\Longrightarrow r \cdot a_i = 0 \ (1 \leq i \leq n) \\ &\Longrightarrow r = 0 \vee a_i = 0 \ (1 \leq i \leq n) \\ &\Longrightarrow r = 0 \vee a(x) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \end{aligned}$$

(5) *Así,* $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un* $\mathbb{R}$ *- Espacio Vectorial.*

Ejemplo 3.0.8. **Funciones Reales definidas en** U, $F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$

(1) *Descripción del Conjunto*

Sea $U \subset \mathbb{R}$ *tal que* $U \neq \emptyset$ *entonces*

$$F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) = \{f : U \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$$

(2) *Igualdad en* $F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$

Sea $f \in F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$ *y* $g \in F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$ *entonces*

$$f = g \iff f(x) = g(x) \quad (\forall x; x \in U)$$

(3) *Operación Interna*

$$\begin{array}{rcccc} + & : & F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \times F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) & \longmapsto & F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \\ & & (f, g) & \longmapsto & f + g \end{array}$$

Donde,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) (\forall x; x \in U)$$

Observen que:

- $0_{F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})} = 0$ *es el elemento neutro aditivo si y sólo si*
$$0(x) = 0(\forall x; x \in U)$$
. Esta función se conoce como la función nula.

- $-f$ *es el inverso aditivo de* $f \in F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$ *si y sólo si*
$$(-f)(x) = -f(x)$$

(4) *Operación Externa*
$$\begin{array}{rcccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) & \longmapsto & F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) \\ & & (r,f) & \longmapsto & r \cdot f \end{array}$$
Donde,
$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)(\forall x; x \in U)$$
Observen que:
$$r \cdot [f(x) + g(x)] = r \cdot f(x) + r \cdot g(x)(\forall x; x \in U)$$
Así que,
$$r \cdot (f + g) = r \cdot f + r \cdot g$$
$$r \cdot f(x) = 0 \Longrightarrow r = 0 \vee f(x) = 0$$
Luego,
$$r \cdot f = 0_{F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})} \Longleftrightarrow r = 0 \vee f = 0_{F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})}$$

(5) *Así,* $(F_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un* $\mathbb{R}$ *- Espacio Vectorial.*

Ejemplo 3.0.9. *Sea* $U \subset \mathbb{R}$ *tal que* $U \neq \emptyset$ *entonces*

(1) **Funciones Reales Continuas en** U , $C_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$
$$C_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) = \{f : U \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función continua en } U\}$$

(2) **Funciones Reales Derivables en** U , $D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R})$
$$D_{\mathbb{R}}(U,\mathbb{R}) = \{f : U \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función derivable en } U\}$$

Observación 3.0.10. *Si en 3.0.5, 3.0.6, 3.0.7, 3.0.8 y 3.0.9 ponemos* $\mathbb{C}$ *en lugar de* $\mathbb{R}$ *entonces tenemos que:*

- $\mathbb{C}^n$
- $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n \times m)$
- $\mathbb{C}[x]$
- $F_{\mathbb{C}}(U,\mathbb{C})$
- $C_{\mathbb{C}}(U,\mathbb{C})$
- $D_{\mathbb{C}}(U,\mathbb{C})$

Son $\mathbb{C}$*- espacios vectoriales.*

Definición 3.0.11.

Los elementos de un k-espacio vectorial se denominarán vectores y los elementos de k se llamarán escalares.

4. Subespacios

En orden a cumplir nuestros objetivos debemos comenzar por intentar responder la pregunta

¿Cómo ubicar en forma eficiente los elementos de un k-espacio vectorial?

(1) Una dificultad inmediata es la siguiente:

Si V es un k-espacio vectorial y k tiene infinitos elementos entonces V tiene infinitos elementos.

En efecto

Si $v \in V$ entonces $r \cdot v \in V$ $(\forall r; r \in k)$, así que hay tantos $r \cdot v$ en V como elementos r hay en k, así que

$$|k| = \infty \Longrightarrow |V| = \infty \quad \text{donde } ||, \text{ significa cardinalidad}$$

Ejemplo 4.0.12.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $v = (1,3) \in \mathbb{R}^2$ entonces para cada $r \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} r \cdot v &= r \cdot (1,3) \\ &= (r, 3 \cdot r) \end{aligned}$$

Luego, sí notamos a la colección de puntos de esta forma como en (38) entonces tenemos que

$$\langle\{(1,3)\}\rangle = \{r(1,3) \mid r \in \mathbb{R}\} \tag{42}$$

Representa la línea recta de ecuación $y = 3x$, es decir geométricamente tenemos:

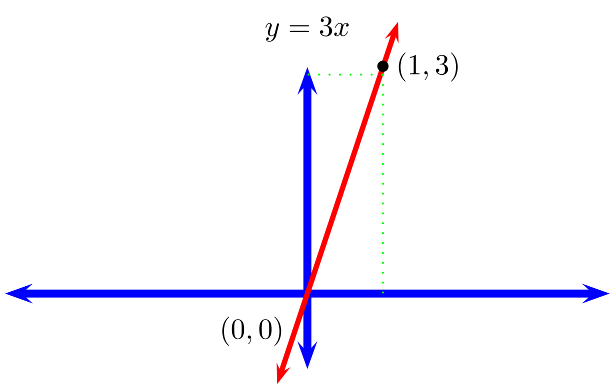

Figura 4

Para este punto podemos concluir lo siguiente:

- Claramente, (42) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial
- En general, si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial entonces

$$(\forall v; v \in V) \Longrightarrow \langle\{v\}\rangle = \{r \cdot v \mid r \in \mathbb{K}\} \tag{43}$$

es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

- Ya imaginas una recta de polinomios o de matrices !!

(2) Podemos generalizar (43), a una cantidad finita de elementos de V.

En efecto

Sea $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ entonces

$$\langle G\rangle = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\}$$

Ejemplo 4.0.13. *(generadores canónicos o clásicos de $\mathbb{R}^2$)*

(a) *Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces usando la operatoria de $\mathbb{R}^2$, tenemos:*

$$\begin{aligned} v &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \end{aligned}$$

Esto significa que $v = (x, y) \in \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle$, así que

$$\mathbb{R}^2 \subset \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle$$

y como

$$\langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle \subset \mathbb{R}^2$$

entonces

$$\mathbb{R}^2 = \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle \tag{44}$$

La pregunta es:

$$\boxed{\text{¿ Qué significa que } \mathbb{R}^2 = \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle \text{ ?}}$$

La respuesta es de acuerdo a la definición de $\langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle$, que:

Cada punto del plano se expresa como una suma de dos puntos de $\mathbb{R}^2$, el uno del eje x y el otro del eje y.

(b) *Sea $\alpha = \{(1, 1), (1, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$ entonces*

$$\langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle = \langle\{(1, 1), (1, -1)\}\rangle$$

En efecto

$$v \in \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$v \in \mathbb{R}^2 \wedge (\exists x_i; x_i \in \mathbb{R}) : v = x_1(1,1) + x_2(1,-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$v = (v_1, v_2) \quad \wedge \quad (v_1, v_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$v = (v_1, v_2) \quad \wedge \quad \begin{array}{rcl|} x_1 + x_2 & = & v_1 \\ x_1 - x_2 & = & v_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$v = (v_1, v_2) \quad \wedge \quad x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \ \wedge \ x_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(v_1, v_2) = \left[\frac{v_1 + v_2}{2}\right](1,1) + \left[\frac{v_1 - v_2}{2}\right](1,-1) \quad (\star)$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} (2,5) &= \left[\tfrac{2+5}{2}\right](1,1) + \left[\tfrac{2-5}{2}\right](1,-1) \\ &= \tfrac{7}{2}(1,1) + \tfrac{(-3)}{2}(1,-1) \end{aligned}$$

En cualquier caso, de $(\star)$ *sigue que:* $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$ *y como también* $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$ *entonces comparando (transitividad de la igualdad) concluimos que*

$$\langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$$

(c) *¿ Qué significa geometricamente el hecho que* $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$ *y que tambien* $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$ *?*

- *Que* $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}$ *"significa que"* $(\forall (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2) : (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

  Equivalentemente

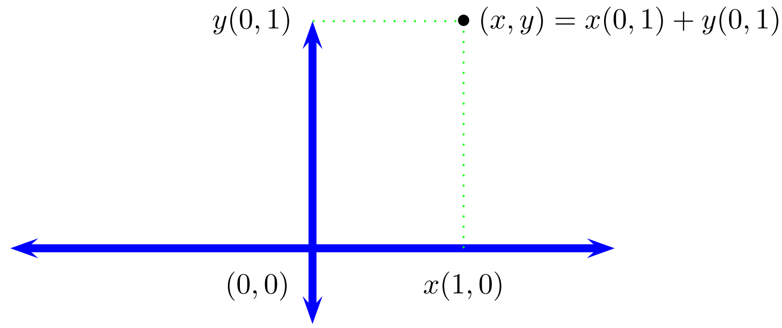

Figura 5

Lo anterior significa que, para ubicar al punto (x,y) debemos caminar x unidades en el eje x en la dirección de $(1,0)$ y trazar por allí una paralela L al eje y, y debemos caminar y unidades en el eje y en la dirección de $(0,1)$ y trazar por allí una paralela T al eje x entonces $L \cap T = (x,y)$

- *Que* $\mathbb{R}^2 = \langle \{(1,1),(1,-1)\} \rangle$ *significa que*

  $$(\forall (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2) : (x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(1,-1)$$

  Equivalentemente

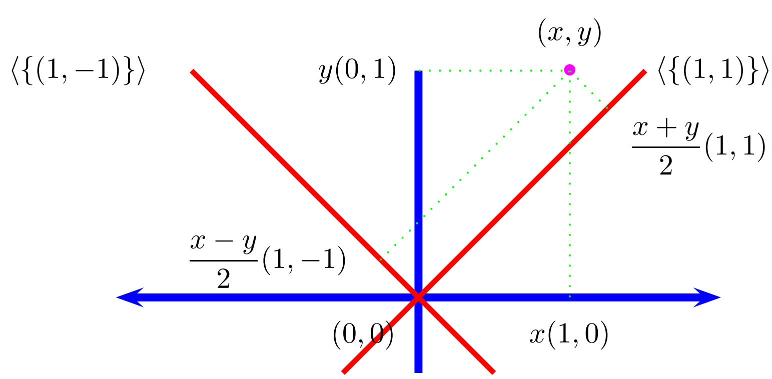

Figura 6

Lo anterior significa que, para ubicar al punto (x,y) debemos caminar $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ unidades en el eje $\langle \{(1,1)\} \rangle$ en la dirección de $(1,1)$ y trazar por allí una paralela al eje $\langle \{(1,-1)\} \rangle$, y debemos caminar $\left(\frac{x-y}{2}\right)$ unidades en el eje $\langle \{(1,-1)\} \rangle$ en la dirección de $(1,-1)$ y trazar por allí una paralela al eje $\langle \{(1,1)\} \rangle$ entonces en la intersección de ambas rectas encontramos el punto (x,y) !!!

Motivados por nuestra discusión anterior comenzaremos a internarnos en un k- espacio vectorial V, para ello comenzamos con la siguiente:

Definición 4.0.14.

Sea $W \subset V$. W será de ahora en adelante llamado un k-Subespacio vectorial de V si

- $W \neq \emptyset$
- W es un k-espacio vectorial

Notación:

$$W \leq V \Longleftrightarrow W \text{ es un k-subespacio vectorial de } V$$

Ejemplo 4.0.15. *(algunos subespacios clásicos)*

(1) $W = 0_V$, *subespacio nulo de* V

(2) $W = V$

(1) *y* (2) *se los conoce como subespacios triviales.*

(3) *Sea* $\mathbb{K}_0^{n+1} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{K}^n\}$ *entonces* $\mathbb{K}_0^{n+1} \leq \mathbb{K}^{n+1}$;$(\forall n; n \in \mathbb{N})$.

Más tarde, mostraremos rigurosamente que $\mathbb{K}_0^{n+1}$ *es una forma de identificar a* $\mathbb{K}^n$ *como un subconjunto de* $\mathbb{K}^{n+1}$

(4) $D_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \leq C_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \leq F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$
ver (3.0.8) *y* (3.0.9)

La definición de subespacio dada es con seguridad clara, pero lamentablemente, mostrar que algo es o no un subespacio se transforma en una “lata ”y esa no es la idea. ¿ cierto ?.

Pero, sea positivo, siempre hay una salida adecuada a la circunstancia, en matemática, estas se llaman **Caracterizaciones** y se hacen a través de Teoremas.

Teorema 4.0.16. *Sea* V *un k-espacio vectorial y* $W \subset V$ *entonces*

$$W \leq V \Longleftrightarrow \begin{cases} W \neq \emptyset \\ u \in W \wedge v \in W & \Longrightarrow (u+v) \in W \\ r \in k \wedge u \in W & \Longrightarrow r \cdot u \in W \end{cases} \tag{45}$$

En efecto

Como existe una equivalencia, es decir aparece un $\Longleftrightarrow$ entonces podemos y probablemente debamos, mostrar en las dos direcciones en forma independiente.

Caso 1. ($\Longrightarrow$)

Esto significa que:

$W \leq V$ *es un dato o hipótesis*

y

$$\begin{cases} W \neq \emptyset \\ u \in W \wedge v \in W & \Longrightarrow (u+v) \in W \\ r \in k \wedge u \in W & \Longrightarrow r \cdot u \in W \end{cases}$$

es lo que hay que probar.

Como W *es un* k*-subespacio vectorial entonces por definición es un* k*-espacio vectorial y luego debe al menos satisfacer las siguientes propiedades:*

- $W \neq \emptyset$

- *Existe una operación interna "* $+$ *" en* W*; tal que*

$$u \in W \wedge v \in W \Longrightarrow (u+v) \in W$$

- *Existe una operación externa "* $\cdot$ *" en* W *tal que*

$$r \in k \wedge u \in W \Longrightarrow r \cdot u \in W$$

Caso 2. ($\Longleftarrow$)

Esto significa que:

$$\begin{cases} W \neq \emptyset \\ u \in W \wedge v \in W & \Longrightarrow (u+v) \in W \\ r \in k \wedge u \in W & \Longrightarrow r \cdot u \in W \end{cases}$$

es un dato o hipótesis de libre disponibilidad

y

$W \leq V$ *es lo que hay que probar.*

- $W \neq \emptyset$

- *Por hipótesis existe una "* $+$ *" y un "* $\cdot$ *" en* W *y como* V *es un* k*-espacio vectorial entonces a fortiori* $(W, +, \cdot, k)$ *es un* k*-espacio vectorial.*

Ejemplo 4.0.17.

Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ entonces $W \leq \mathbb{R}^3$

En efecto

El algoritmo (procedimiento o rutina) a implementar para este caso tendrá el siguiente formato:

Sean $u \in W$, $v \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (datos de entrada arbitrarios)

(1) Por demostrar que (p.d.q.) $(u+v) \in W$

(2) p.d.q. $\lambda \cdot u \in W$

Listo !!

(a) Análisis de datos:

$$u \in W \Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge u_1 + u_2 - u_3 = 0 \quad (\star)$$

Analogamente

$$v \in W \Longleftrightarrow v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (\star\star)$$

(b) Demostremos que $(u+v) \in W$

$$\begin{aligned} u+v &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) && [\text{ ver } (\star) \text{ y } (\star\star)] \\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) && (\text{ Suma en } \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Luego,

$$u + v \in \mathbb{R}^3 \tag{46}$$

De (46),concluimos que $(u+v)$ es un buen candidato para pertenecer a W, pero falta ¡chequear! si verifica la palabra de paso.

Entonces, manos a la obra

$$\begin{aligned} (u_1+v_1) + (u_2+v_2) - (u_3+v_3) &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 - u_3 - v_3 \\ &= (u_1 + u_2 - u_3) + (v_1 + v_2 - v_3) \\ &= 0 + 0 \qquad (\text{ ver } (\star) \text{ y } (\star\star)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $(u+v) \in W$, lo que muestra (1.)

Finalmente

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda(u_1, u_2, u_3) \\ &= (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \end{aligned}$$

Así que, $\lambda u \in \mathbb{R}^3$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + \lambda u_2 - \lambda u_3 &= \lambda(u_1 + u_2 - u_3) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in W$, lo que muestra (2.)

Ejemplo 4.0.18. *(Uno en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$)*

Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid A = A^t\}$ *entonces* $W \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

En efecto

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) *Análisis de datos*

$$A \in W \Longleftrightarrow A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \wedge (a_{ij}) = (a_{ji}) \tag{47}$$

$$B \in W \Longleftrightarrow B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \wedge (b_{ij}) = (b_{ji}) \tag{48}$$

(2) *p.d.q.* $A + B \in W$

De (47) y (48), sigue que

$$A + B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$$

Por otra parte;

$$\begin{aligned} (A+B)^t &= (a_{ij} + b_{ij})^t \\ &= (a_{ji} + b_{ji}) \\ &= (a_{ij})^t + (b_{ij})^t \\ &= (a_{ij}) + (b_{ij}) \qquad \text{ver (47) y (48)} \\ &= A + B \end{aligned}$$

Lo que muestra (2.)

(3) *Finalmente, como:*

$$\begin{aligned} \lambda A &= \lambda(a_{ij}) \\ &= (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

entonces $\lambda A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

Por otra parte;

$$\begin{aligned} (\lambda A)^t &= (\lambda(a_{ij})^t \\ &= (\lambda a_{ij})^t \\ &= (\lambda a_{ji}) \\ &= \lambda(a_{ij})^t \\ &= \lambda(a_{ij}) \qquad \text{ver (47)} \\ &= \lambda A \end{aligned}$$

Así que, $\lambda A \in W$

Ejemplo 4.0.19. *(Uno en $\mathbb{R}_n[x]$)*

Sea $W = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\}$ *entonces* $W \leq \mathbb{R}_n[x]$

En efecto

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) *Análisis de datos*

$$p(x) \in W \Longleftrightarrow p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \tag{49}$$

$$q(x) \in W \Longleftrightarrow p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i b_i = 0 \tag{50}$$

(2) *p.d.q.* $p(x)+q(x)\in W$

De (49) y (50), sigue que

$$p(x)+q(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i\in \mathbb{R}_n[x]$$

Por otra parte;

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(a_i+b_i) &= \sum_{i=0}^{n}(ia_i+ib_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} ia_i+\sum_{i=0}^{n} ib_i\\ &= 0+0 \qquad \textit{ver (49) y (50)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Lo que muestra (2.)

(3) *Finalmente, como:*

$$\begin{aligned}\lambda p(x) &= \lambda\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\\ &= \sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i)x^i\end{aligned}$$

entonces $\lambda p(x)\in \mathbb{R}_n[x]$

Por otra parte;

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\lambda i a_i &= \lambda\sum_{i=0}^{n} ia_i\\ &= \lambda 0 \qquad \textit{ver (49)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Así que, $\lambda p(x)\in W$

Observación 4.0.20.

Desde un punto de vista estructural el teorema 4.0.16, es una herramienta poderosa para decidir si un conjunto es o no, un subespacio en un espacio vectorial dado, no obstante el tiene un problemita que lamentablemente para nosotros es crucial; " no nos dice quienes son los miembros del subespacio W."
Para agregar este ingrediente a nuestro análisis, miremos con estos nuevos ojos a nuestros ejemplos anteriores:

(1) Recreando el ejemplo 4.0.17

$$\begin{aligned} v\in W &\iff v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3\wedge v_1+v_2-v_3=0\\ &\iff v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3\wedge v_1+v_2=v_3\\ &\iff v=(v_1,v_2,v_1+v_2)\wedge(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\\ &\iff v=(v_1,0,v_1)+(0,v_2,v_2)\wedge(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\\ &\iff v=v_1(1,0,1)+v_2(0,1,1)\wedge(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Conclusión 4.0.21.

(i) *Aunque W es un conjunto infinito, basta conocer dos vectores para caracterizar (determinar) a todos los elementos de W, es decir en lenguaje técnico.*

(51)
$$W = \{a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) \mid a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}\}$$

(ii) *Mejor W es un plano y sus generadores, son los vectores*

$$u_1 = (1,0,1) \qquad \wedge \qquad u_2 = (0,1,1)$$

donde, el término generador lo entenderemos como en (38).

Así,

$$W = \langle\{(1,0,1), (0,1,1)\}\rangle$$

(2) Analizando desde esta perspectiva el ejemplo 4.0.18, para $n = 2$

$$\begin{aligned}
A \in W &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde, $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{R}^3$

Luego,

(52)
$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(3) "Lo mostrado en los ejemplos anteriores constituye uno de los más importante resultados básicos ". Por lo cual lo archivamos como un teorema.

Teorema 4.0.22.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ entonces

$$W = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \le i \le n) \right\} \le V$$

En efecto

Sean $u \in W$, $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

(53)
$$\begin{aligned}
u \in W &\iff u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \mid a_i \in \mathbb{K}\ (1 \le i \le n) \\
w \in W &\iff w = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i \mid b_i \in \mathbb{K}\ (1 \le i \le n)
\end{aligned}$$

Ahora;

(1) p.d.q. $(u+w) \in W$

$$\begin{aligned} u+w &= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot v_i \end{aligned}$$

Luego, $(u+w) \in W$

(2) p.d.q. $\lambda \cdot u \in W$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_i) \cdot v_i \end{aligned}$$

Luego, $\lambda \cdot u \in W$

Así que $W \leq V$

Definición 4.0.23.

Si V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial entonces el conjunto

(1) $W = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n) \right\}.$

Se llamará subespacio generado por $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

(2) $u \in V$, se llama una combinación lineal de $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si existen n - escalares, digamos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \tag{54}$$

Es decir, los elementos de W se llaman combinaciones lineales de $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

4.1. Ejercicios resueltos de Subespacios en $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z + 5w = 0\}$ entonces $W \leq \mathbb{R}^4$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 \wedge u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 5u_4 = 0 \\ &\iff u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 \wedge u_1 = 2u_2 - 3u_3 - 5u_4 \\ &\iff u = (2u_2 - 3u_3 - 5u_4, u_2, u_3, u_4) \wedge (u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = u_2(2,1,0,0) + u_3(-3,0,1,0) + u_4(-5,0,0,1) \\ &\iff u \in \langle \{(2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-5,0,0,1)\} \rangle \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \langle \{(2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-5,0,0,1)\} \rangle$$

Así, aplicando (4.0.22) tenemos que $W \le \mathbb{R}^4$

(2) Si $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 0 \wedge z + w = 0\}$ entonces $W \le \mathbb{R}^4$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} u \in W & \Longleftrightarrow & u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 \wedge [2u_1 - u_2 = 0 \wedge u_3 + u_4 = 0] \\ & \Longleftrightarrow & u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 \wedge 2u_1 = u_2 \wedge u_3 = -u_4 \\ & \Longleftrightarrow & u = (u_1, 2u_1, -u_4, u_4) \wedge (u_1, u_4) \in \mathbb{R}^2 \\ & \Longleftrightarrow & u = u_1(1,2,0,0) + u_4(0,0,-1,1) \\ & \Longleftrightarrow & u \in \langle \{(1,2,0,0), (0,0,-1,1)\} \rangle \end{array}$$

Luego,

$$W = \langle \{(1,2,0,0), (0,0,-1,1)\} \rangle$$

Así, aplicando (4.0.22) tenemos que $W \le \mathbb{R}^4$

(3) $\mathbb{R}^n = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \rangle$, donde

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots & & \\ e_n & = & (0,0,0,\dots,1) \end{array}$$

4.2. Ejercicios Propuestos en $\mathbb{R}^n$.

Demuestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios.

(1) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$

(2) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 10x - 5y = 0\}$

(3) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

(4) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - z = 0\}$

(5) $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - w = 0\}$

(6) $W = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x = \dfrac{y + 2z - w}{5}\right\}$

4.3. Ejercicios resueltos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$.

(1) Si $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a + b - c - 2d = 0 \right\}$ entonces $W \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a + b - c - 2d = 0 \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge c = a + b - 2d \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ a + b - 2d & d \end{pmatrix} \wedge (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2d & d \end{pmatrix} \\ &\iff u = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(2) Si $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$ entonces $W \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge b = c \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \wedge (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &\iff u = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

4.4. Ejercicios Propuestos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$.

Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ son subespacios vectoriales.

(1) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$, donde A^t significa la matriz traspuesta de la matriz A

(2) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$.

La $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ se llama la traza de la matriz A y se nota $tr(A)$

(3) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det(A) \neq 0\}$

(4) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{Si } j = n+1-i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

(5) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{Si } j \leq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

(6) $W = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{Si } j \geq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}\right\}$

4.5. Ejercicios Resueltos en $\mathbb{R}_n[x]$.

(1) Si $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 - a_1 + 2a_2 = 0\}$ entonces $W \leq \mathbb{R}_2[x]$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_0 - a_1 + 2a_2 = 0 \\ &\iff u = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_1 = a_0 + 2a_2 \\ &\iff u = a_0 + (a_0 + 2a_2)x + a_2x^2 \wedge (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff u = a_0(1 + x) + a_2(2x + x^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \langle\{1 + x, 2x + x^2\}\rangle$$

(2) Si $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid p(1) = 0\}$ entonces $W \leq \mathbb{R}_2[x]$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge p(1) = 0 \\ &\iff u = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ &\iff u = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_2 = -a_0 - a_1 \\ &\iff u = a_0 + a_1x + (-a_0 - a_1)x^2 \wedge (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff u = a_0(1 - x^2) + a_1(x - x^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \langle\{1 - x^2, x - x^2\}\rangle$$

(3) Si $W = \left\{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\right\}$ entonces $W \leq \mathbb{R}_n[x]$

En efecto

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \\ &\iff u = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \wedge a_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \\ &\iff u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right) x^n \\ &\iff u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x^i - x^n) \end{aligned}$$

Luego,

$$W = \langle\{1 - x^n, x - x^n, \dots, x^{n-1} - x^n\}\rangle$$

4.6. Ejercicios Propuestos en $\mathbb{R}_n[x]$.

Demuestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}_n[x]$ son subespacios.

(1) $W = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid p(-3) = 0\}$

(2) $W = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid p(\sqrt{2}) = 0\}$

(3) $W = \left\{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n} j a_i = 0; j \in [\mathbb{R} - \{0\}]\right\}$

(4) $W = \left\{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0\right\}$

4.7. Ejercicios Resueltos Misceláneos.

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Demuestre que si $W \leq V$ entonces $0_V \in W$

En efecto

Como $W \leq V$ entonces para cada $w \in W \wedge \lambda \in \mathbb{K}$ arbitrario tenemos que $\lambda \cdot w \in W$, luego en particular para $\lambda = 0$ se verifica que $0 \cdot w = 0_V \in W$

Observen que en $\mathbb{R}^2$ por ejemplo, las rectas para ser un subespacio deben pasar por el origen $(0,0)$. Es decir

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx, m \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$$

En general, en $\mathbb{R}^n$ son subespacios los conjuntos de la forma

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0\}$$

(2) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Demuestre que

$$\text{Si } W_1 \leq V \wedge W_2 \leq V \text{ entonces } W_1 \cap W_2 \leq V$$

En efecto

Aquí no queda otra opción que usar la definición (¿ por qué ?), así que manos a la obra.

Sean $u \in W_1 \cap W_2$, $v \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

(a) p.d.q. $u + v \in W_1 \cap W_2$

- $u \in W_1 \cap W_2 \Longleftrightarrow u \in W_1 \wedge u \in W_2$
- $v \in W_1 \cap W_2 \Longleftrightarrow v \in W_1 \wedge v \in W_2$
- $W_1 \leq V \Longrightarrow u + v \in W_1$
- $W_2 \leq V \Longrightarrow u + v \in W_2$

Luego, $(u + v) \in W_1 \cap W_2$

(b) p.d.q. $\lambda \cdot u \in W_1 \cap W_2$

- $W_1 \leq V \Longrightarrow \lambda \cdot u \in W_1$
- $W_2 \leq V \Longrightarrow \lambda \cdot u \in W_2$

Luego, $\lambda \cdot u \in W_1 \cap W_2$

(3) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Demuestre que

$$\text{Si } W_1 \leq V \wedge W_2 \leq V \text{ entonces } W_1 \cup W_2$$

no es necesariamente un subespacio de V.

En efecto

Basta con dar un contraejemplo, es decir un ejemplo que muestre que alguna de las condiciones para ser subespacio no se cumple.
Considera los siguientes subespacios del plano Cartesiano

- $W_1 =$ Eje x $= \{(x,0);\mid x \in \mathbb{R}\}$
- $W_2 =$ Eje y $= \{(0,y);\mid y \in \mathbb{R}\}$
- $W_1 \cup W_2 = \{(x,y);\mid x = 0 \vee y = 0\}$

Es claro, que $W_1 \leq \mathbb{R}^2$ y $W_2 \leq \mathbb{R}^2$, sin embargo,

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$$

(4) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y consideremos los subconjuntos de V $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Si $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} iv_i$ y $(1 \leq k \leq n)$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{55}$$

En efecto

(i) Entendiendo los elementos o datos del problema.

$u \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$ si y sólo si **existen** $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

(ii) Simplificando el problema.

El punto anterior puede ser traducido a la siguiente forma operacional.
"**Para conocer un elemento de $\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$ o de $\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$, basta conocer los generadores** "

(iii) Resolviendo el problema

$w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} iv_i = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + \cdots + k \cdot v_k$ entonces tomando en el punto (i) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $\dots$; $a_k = k$ sigue que $w_k \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, y entonces del punto (ii) sigue que

$$\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \tag{56}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} w_{k+1} - w_k &= \sum_{i=1}^{k+1} i v_i - \sum_{i=1}^{k} i v_i \\ &= (k+1) v_{k+1} \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \tfrac{1}{(k+1)}(w_{k+1} - w_k) \qquad k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ v_1 &= w_1 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{array}{cccccccccccc} v_1 & = & 1 \cdot w_1 & + & 0 \cdot w_2 & + & 0 \cdot w_3 & + & \dots & + & 0 \cdot w_n \\ v_2 & = & -\frac{1}{2} \cdot w_1 & + & \frac{1}{2} \cdot w_2 & + & 0 \cdot w_3 & + & \dots & + & 0 \cdot w_n \\ v_3 & = & 0 \cdot w_1 & - & \frac{1}{3} \cdot w_2 & + & \frac{1}{3} \cdot w_3 & + & \dots & + & 0 \cdot w_n \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ v_n & = & 0 \cdot w_1 & + & 0 \cdot w_2 & + & 0 \cdot w_3 & + & \dots & + & \frac{1}{n} \cdot w_n \end{array}$$

Luego,

(57) $$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subset \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$$

Así que juntando (56) y (57) tenemos que

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$$

4.8. Ejercicios Propuestos Misceláneos.

(1) Demuestre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\} \not\leq \mathbb{R}$

(Ayuda: Use (4.7))

(2) Sea $W = \langle \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

(i) Demuestre que $(2, 2, 2) \in W$. Es decir, resuelva la ecuación vectorial

$$(2, 2, 2) = a_1(1, 0, 0) + a_2(1, 1, 0) + a_3(1, 1, 1)$$

(ii) Demuestre que $(x, y, z) \in W$, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(iii) Concluya que $\mathbb{R}^3 = \langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\rangle$

(3) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$$

(4) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}\rangle$$

(5) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Sea $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i$ y $(1 \leq k \leq n)$.

Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{58}$$

(6) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Sea $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} jv_i$ y $(1 \leq k \leq n)$.

Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{59}$$

(7) Demuestre que

- $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$
- $W_1 \cap W_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

En general, si V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $W_1 \leq V$ y $W_2 \leq V$ entonces V se dice "Suma directa de los subespacios W_1 y W_2 "si

- $V = W_1 + W_2$

- $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

En tal caso, notamos $V = W_1 \bigoplus W_2$

(8) Demuestre que

$$\mathbb{R}^2 = \ \{\text{eje x}\} \ \oplus \ \{\text{eje y}\}$$

(9) Demuestre que

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) = \ \{ \text{ matrices simétricas } \} \oplus \ \{ \text{ matrices antisimétricas } \}$$

(10) Demuestre que

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_0[x] \oplus \langle \{x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

5. Base y Dimensión

Motivación 5.0.1.

Sabemos que si V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y W un subespacio de V entonces W es en particular un subconjunto de V. Es decir.

$$W \leq V \Longrightarrow W \subset V$$

Ahora, si $W = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$ entonces

$$W = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \leq V \Longrightarrow W = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subset V \tag{60}$$

La condición (60) nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 5.0.2.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Diremos que el subconjunto de V, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un "Sistema de generadores para V "si

$$V = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \tag{61}$$

Equivalentemente:

α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ existen n- escalares, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

O en lenguaje más pragmático:

α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ la **ecuación vectorial**

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \tag{62}$$

tiene solución.

Ejemplo 5.0.3. *Clásicos*

(1) $c(n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, donde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^n$, ya que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \tag{63}$$

Por la forma de (63), se acostumbra a llamar a "$c(n)$ con el nombre de generadores canónicos. "

(2) En particular; $\mathbb{R}^2 = \langle \{(1, 0), (0, 1)\} \rangle$

(3) $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$, pues

$$(x,y) = (\frac{x+y}{2})(1,1) + (\frac{x-y}{2})(1,-1)$$

(4) $m(n\times s) = \{E_{ij} \mid (1\leq i\leq n)\wedge(1\leq j\leq s)\}$, donde

$$E_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{en la posición } ij \\ 0: & \text{en otra parte}\end{cases}$$

Es un sistema de generadores de $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times s)$

Así por ejemplo, para $n = s = 2$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} &= aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

(5) $p(n) = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ son los generadores canónicos de $\mathbb{R}_n[x]$,

pues,

$$q(x) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + \cdots + a_n x^n$$

Es decir,

$$\mathbb{R}_n[x] = \langle\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}\rangle$$

Ejemplo 5.0.4. *Un poco más teóricos.*

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$V = \langle\{v_1, v_2\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$$

En efecto

(a) Identificamos lo que hay que realizar. En este caso tenemos que demostrar que (en símbolos p.d.q.) $V = \langle\{v_1, v_1+v_2\}\rangle$, es decir debemos mostrar que la ecuación vectorial

$$v = a_1v_1 + a_2(v_1+v_2) \tag{64}$$

Tiene solución para cada $v \in V$.

(b) Analizamos los datos.

Como $V = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$ y $v \in V$ entonces tiene solución la ecuación vectorial

(65) $$v = b_1v_1 + b_2v_2$$

Es decir, existen $b_1 \in \mathbb{K}$ y $b_2 \in \mathbb{K}$ tal que (65) es una identidad.

(c) Supongamos por un instante que la (64), tiene solución entonces tenemos

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2(v_1 + v_2) \\ &= a_1v_1 + a_2v_1 + a_2v_2 \\ &= (a_1 + a_2)v_1 + a_2v_2 \end{aligned}$$

Luego, basta que tomemos:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & + & a_2 & = & b_1 \\ & & a_2 & = & b_2 \end{array} \Longrightarrow a_1 = b_1 - b_2 \quad \wedge \quad a_2 = b_2$$

(d) As¡ $V = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$

Solución Alternativa

p.d.q.

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$$

Observemos que

(i) $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_1 + v_2)$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$

(ii) $v_2 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot (v_1 + v_2)$, luego $v_2 \in \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$

(iii) Así que,

(66) $$\langle\{v_1, v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$$

Análogamente,

(i) $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$

(ii) $v_1 + v_2 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$, luego $v_1 + v_2 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$

(iii) Así que,

(67) $$\langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2\}\rangle$$

Luego, de (66) y (67), sigue que

$$\langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$$

(2) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$V = \langle\{v_1, v_2\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}\rangle$$

Es un buen ejercicio.

(3) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$. Sea

$$\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V \ \text{ tal que } w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i; \ \text{y } (1 \leq k \leq n)$$

entonces demuestre que

$$V = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{68}$$

En efecto

(a) $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} v_i; \ (1 \leq k \leq n) \Longrightarrow w_k \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$

(b) Luego,

$$\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$$

Ahora,

(a) $v_k = w_k - w_{k-1}$, para $k = 2, 3 \dots, n$ y $v_1 = w_1$.

(b) Así que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \subset \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

Finalmente,

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(4) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$. Sea

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset V \text{ tal que } w_k = \sum_{i=1}^{k} i v_i \text{ y } (1 \leq k \leq n)$$

entonces demuestre que

$$V = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{69}$$

Es un buen ejercicio.

Observación 5.0.5.

Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sistema de generadores para el $\mathbb{K}$ - espacio vectorial V entonces tenemos lo siguiente: **Para cada $v \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tales que**

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Equivalentemente, la ecuación

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \tag{70}$$

tiene siempre solución en $\mathbb{K}^n$

Mejor aún, tenemos automáticamente una relación entre el espacio V y el conjunto $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)$, definida por:

$$\begin{array}{rcccc} [\ ]_\alpha & : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \\ & & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array}$$

Donde,

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v = \sum_{k=1}^{n} a_kv_k$$

El único problema es que un elemento de V, puede tener dos o más matrices relacionadas con el, como por ejemplo, si $\alpha = \{(1,0),(0,1),(2,3)\}$ entonces no cabe duda que $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1),(2,3)\}\rangle$, no obstante tenemos la siguiente anomalía:

$$[(2,3)]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$[(2,3)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Del análisis de (71) y (72) sigue que

$$(0,0) = 2\cdot(1,0) + 3\cdot(0,1) + (-1)\cdot(2.3)$$

Pero, canónicamente el origen se expresa como

$$(0,0) = 0\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1) + 0\cdot(2,3)$$

Así que la conclusión es la siguiente:

Teorema 5.0.6.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ un sistema de generadores de V entonces para cada vector $v \in V$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots a_n$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$ si y sólo si el vector nulo 0_V se escribe de forma única.

En efecto

Si $v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$ y $v=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i$, son dos representaciones distintas de v entonces claramente tenemos que $0_V=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)v_i$. Es decir, 0_V tiene dos representaciones distintas.

La recíproca es inmediata, pues 0_V es un vector del espacio.

Definición 5.0.7.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha=\{v_1,\dots,v_n\}$ un subconjunto de V. Diremos que α es un conjunto **Linealmente Independiente** (en símbolos Li) si el vector nulo 0_V tiene representación única como combinación lineal de los elementos de α. Caso contrario decimos que α es un conjunto **Linealmente Dependiente** (en símbolos Ld).

Es decir, α es Li si

$$\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=0\Longrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0 \tag{73}$$

Ejemplo 5.0.8. *Clásicos*

(1) $c(n)=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, *es un conjunto Linealmente independiente en* $\mathbb{R}^n$, *donde*

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1,0,0,\dots,0\}\\ e_2 &= \{0,1,0,\dots,0\}\\ &\vdots\\ e_n &= \{0,0,0,\dots,1\}\end{aligned}$$

En efecto

Supongamos que tenemos la combinación lineal nula en $\mathbb{R}^n$

$$a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n=0_{\mathbb{R}^n} \tag{74}$$

(74) *es siempre el comienzo para verificar si un conjunto es Li. o Ld..*

Así,

$$\begin{aligned} a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n=0_{\mathbb{R}^n} &\iff (a_1,a_2,\dots,a_n)=(0,0,\dots,0)\\ &\iff a_i=0\quad(1\le i\le n)\end{aligned}$$

luego, $c(n)$ *es un conjunto Li. en* $\mathbb{R}^n$

(2) *Sea* $m(s\times t)=\{E_{ij}\in\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s\times t)\,|\,(1\le i\le s);(1\le j\le t)\}$, *donde*

$$E_{ij}=\begin{cases}1 & \text{en la posición } ij\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Así, por ejemplo

$$m(2\times 2)=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Luego, $m(s\times t)$ es un conjunto Li. en $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s\times t)$;$(\forall s, s\in\mathbb{N})(\forall t, t\in\mathbb{N})$

En efecto (juguemos a los símbolos.)

Partimos como siempre:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}a_{ij}E_{ij}=0_{\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s\times t)} \Longrightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1t}\\a_{21}&\dots&a_{2t}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{s1}&\dots&a_{st}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\dots&0\\0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{ij}=0 \quad (1\le i\le s),(1\le j\le t)$$

Luego, $m(s\times t)$ es Li. en $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s\times t)$, en lo que sigue, $m(s)=m(s\times s)$

(3) *Sea $p(n)=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$, $(n\in\mathbb{N})$ entonces $p(n)$ es Li. en $\mathbb{K}_n[x]$.*

En efecto

Como siempre, supongamos que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=0_{\mathbb{K}_n[x]}$ entonces

$$\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=0_{\mathbb{K}_n[x]} \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}0x^i$$

$$\Longrightarrow a_i=0 \quad (0\le i\le n)$$

Observación 5.0.9. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha=\{v_1,\dots,v_n\}$ un subconjunto de V entonces*

(1) *La relación*

$$\begin{array}{rccc}[\,]_\alpha & : V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)\\ & v & \longmapsto & [v]_\alpha\end{array}$$

Donde,

$$[v]_\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\Longleftrightarrow v=\sum_{k=1}^{n}a_kv_k$$

es una función si y sólo si α es un sistema de generadores y es un conjunto linealmente independiente en V.

(2) *Más aún* $[\ ]_\alpha$ *es una biyección entre los* $\mathbb{K}$ *- espacios vectoriales* V *y* $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$

En efecto

a función inversa de $[\ ]_\alpha$ *es la siguiente:*

$$\begin{array}{rcccc} [\ ]_\alpha^{-1} & : & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) & \longmapsto & V \\ & & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \longmapsto & v \end{array}$$

Donde,

$$v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

(3) *Así que tenemos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, shift right=2, "{[\ ]_\alpha}"'] & \textit{Espacio Teórico} \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \arrow[u, shift right=2, "{[\ ]_{\alpha^{-1}}}"'] & \textit{Espacio Práctico} \end{tikzcd}$$

(4) *Así que un conjunto* α *con esas características permite determinar en forma única cada elemento del espacio vectorial, es decir este conjunto es un generador exacto del espacio* V*.*

Definición 5.0.10. *Sea Sea* V *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ *un subconjunto de* V *entonces* α *se llamará una base del espacio vectorial* V *si*

(1) α *es un sistema de generadores de* V*.*

(2) α *es un conjunto Linealmente independiente en* V

Equivalentemente

α es una base de V si para cada $v \in V$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$\boxed{v \quad = \quad a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n}$$

Ejemplo 5.0.11. *Clásicos*

(1) *En* $\mathbb{K}^n$

$$c(n) = \{e_2, e_2, \dots, e_n\} \tag{75}$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}^n$*, pues*

$$\begin{array}{rcl}
(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \\
& \Updownarrow & \\
[(x_1, x_2, \dots, x_n)]_{c(n)} & = & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

(2) *En* $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)$

$$m(n \times s) = \{E_{ij} \mid (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq s)\} \tag{76}$$

La llamaremos la base canónica de $(\mathbb{M})_{\mathbb{K}}(n \times s)$*, pues por ejemplo para* $n = s = 2$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} &= x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22} \\
&= x_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) *En* $\mathbb{K}[x]$

$$p(\infty) = \{1, x, x^2, \dots\} \tag{77}$$

La llamaremos la base canónica de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$*, pues genéricamente un polinomio se escribe como*

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_tx^t; \quad (t \in \mathbb{N})$$

En particular,

$$p(n) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{78}$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$*, el espacio vectorial de polinomios hasta de grado* n*.*

Ejemplo 5.0.12. *Otros ejemplos*

(1) *En* $\mathbb{K}^n$*, sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base entonces*

- $c\alpha = \{c \cdot v_1, c \cdot v_2, \ldots, c \cdot v_n\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$, *para cada* $c \in \mathbb{K} - \{0\}$
- $\alpha^+ = \{v_1, v_1 + v_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$
- *En general* $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, *donde* $w_j = \sum_{i=1}^{j} a_i v_i$, *para* $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathbb{K}^n$ *fijo, es una base de* $\mathbb{K}^n$

(2) *Sea* $V = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid$ *tal que* f *continua* $\}$. *Si definimos el subespacio de* V

$$W = \langle\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}\rangle$$

entonces $\alpha = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$, *es una base de* W, *para cada* $n \in \mathbb{N}$

Observación 5.0.13.

Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $w_1 \in V$

- Si $\alpha_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1\}$ entonces α_1 es Ld. en V.

  En efecto

  - Aplicamos la definición de independencia (dependencia) Lineal.

    Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + a_{n+1} w_1 = 0_V$ entonces P.D.Q. existe al menos un a_j en nuestra lista de escalares que es no nulo ($a_j \neq 0$).

  - Com α es una base entonces le aplicamos su definición para obtener una representación única para el vector w_1, es decir

$$w_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{79}$$

- Dos casos inmediatos

  - Caso 1.

$$w_1 = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 \text{ es Ld. !!!}$$

  - Caso 2.

$$w_1 \neq 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + (-1) w_1 = 0_V$$

  Es decir de (79) sigue que tenemos una combinación lineal nula con al menos un escalar no nulo, luego α_1 Ld.

- Si $\alpha_s = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_s\}$ entonces α_s es Ld. en V.

En efecto

- Caso 1.

$$w_i = 0, \text{ para algún i} \Longrightarrow \alpha_s \text{ es Ld}$$

- Caso 2.

$$w_i \neq 0, \text{ para algún i} \Longrightarrow \alpha_s \text{ es Ld}$$

Aplicando el argumento descrito para α_1

En cualquier caso, hemos probado uno de los resultados más importantes del algebra Lineal:

Teorema 5.0.14.

Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ entonces cualquier subconjunto de V que posea más de n-elementos es linealmente dependiente

Corolario 5.0.15.

Sean $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ entonces n=m.

En efecto

Como α es base y β es linealmente independiente entonces por el teorema 5.0.14 tenemos que $m \leq n$.
Recíprocamente como β es base y α es Linealmente independiente entonces nuevamente por 5.0.14, tenemos que $n \leq m$. así que $n = m$.

De lo anterior podemos concluir con la siguiente definición.

Definición 5.0.16. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Llamaremos dimensión de V al número de vectores de una base de V.*

Notaremos:
$\dim_{\mathbb{K}}(V) :=$ *dimensión de V sobre $\mathbb{K}$*

Ejemplo 5.0.17. *Clásicos o Canónicos*

(1) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(2) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$;

(4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$; *pues* $card(p(n)) = n + 1$

(5) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$; *pues* $card(p(\infty)) = \infty$

(6) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)) = n \cdot s; pues\ card(m(n \times s)) = n \cdot s$

Más adelante obtendremos muchos otros ejemplos, pero por ahora nos dedicaremos a cosechar lo que hemos sembrado. En la siguiente sección, la cual sin lugar a dudas es la base de la importancia radical que tiene el Algebra Lineal en el desarrollo de la actual tecnología, estudiaremos la aparición de los lenguajes que caracterizan a la investigación teórica o modelamiento y a la investigación práctica o matricial.

Lecturas sugeridas como complementarias al estudio hasta ahora realizado.

(1) Hoffman K. y Kunze R.
Algebra Lineal
Prentice Hall
(2) Lang S.
Introduction to Linear Algebra
Addison - Wesley
(3) Lima E.
Algebra Linear
Matematica Universitaria
(4) Rojo J.
Ejercicios y problemas de Algebra Lineal
McGraw-Hill

6. Espacio Coordenado

Motivación 6.0.18. *Para fijar ideas partamos considerando nuestro prototipo de buen espacio vectorial, osea* $\mathbb{R}^2$*. Hasta el momento sabemos que :*

(1) *Existe una biyección natural entre* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1)$*, definida por*

$$\begin{array}{c} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Big\downarrow [\ ]_{c(2)} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1) \end{array}$$

Figura 7

Luego,las coordenadas en el sentido usual, de un punto (x, y) *en el plano, respecto de la base canónica son " x e y ", en ese orden.*

(2) *Si* $\alpha = \{(1, 1), (1, -1)\}$*, es otra base del plano entonces las coordenadas de* (x, y) *respecto de* α *son "* $\dfrac{x+y}{2}$ *y* $\dfrac{x-y}{2}$ *". Es decir tenemos,*

$$\begin{array}{c} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Big\downarrow [\ ]_{\alpha} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1) \end{array}$$

Figura 8

(3) *Las situaciones anteriores nos sugieren dos cuestiones centrales, que podemos resumir en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "1_{\mathbb{R}^2}"] \arrow[d, "{[\ ]_{c(2)}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "{[\ ]_{\alpha)}}"] \\ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1) \arrow[r, "?"] & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1) \end{tikzcd}$$

Figura 9

Vamos a intentar responder a este problema.

(1) *Fijense bien*

$$\begin{aligned}
[(x,y)]_\alpha &= \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2} \\ \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [(1,0)]_\alpha & [(0,1)]_\alpha \end{pmatrix} [(x,y)]_{c(2)}
\end{aligned}$$

Luego, podemos notar con toda propiedad:

$$[I]_{c(2)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y obtenemos lo siguiente:

- *En primer lugar, respondemos el problema inicial, pues:*

$$[I]_{c(2)}^{\alpha}[(x,y)]_{c(2)} = [(x,y)]_\alpha$$

- *En segundo lugar, si copiamos la idea en el otro sentido:*

$$\begin{aligned}
[I]_{\alpha}^{c(2)} &= \begin{pmatrix} [(1,1)]_{c(2)} & [(1,-1)]_{c(2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) *Como* $[(x,y)]_{c(2)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *entonces en particular*

- $[(1,1)]_{c(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $[(1,-1)]_{c(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego, podemos definir una matriz que guarde esa información como sigue:

$$[I]_{\alpha}^{c(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{80}$$

(3) *Análogamente como*

$$[(x,y)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

entonces en particular

- $[(1,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $[(0,1)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Luego, podemos definir una matriz que guarde esa información como sigue:

(81) $$[I]_{c(2)}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(4) *Finalmente, veamos que se puede hacer con esas matrices*

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  Luego,

(82) $$[I]_{\alpha}^{c(2)} [(x,y)]_\alpha = [(x,y)]_{c(2)}$$

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

  Así que,

(83) $$[I]_{c(2)}^{\alpha} [(x,y)]_{c(2)} = [(x,y)]_\alpha$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  entonces

(84) $$[I]_{\alpha}^{c(2)} [I]_{c(2)}^{\alpha} = I_2$$

Es decir,

$$[I]_{\alpha}^{c(2)} = \left([I]_{c(2)}^{\alpha}\right)^{-1} \tag{85}$$

Definición 6.0.19.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V entonces $[v]_\alpha \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)$ se llamará las α **- coordenadas de** v y $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$ el α - espacio coordenado de V.

Esto permite construir una tripleta,$((V, \alpha),\ [\ ]_\alpha, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1))$, que contiene a la teoría y a la práctica, conectadas por un sistema de información o base α.
Es decir, tenemos la función

$$\begin{tikzcd} (V,\alpha) \arrow[d, "{[\ ]_\alpha}"'] \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \end{tikzcd}$$

Figura 10

Donde se verifica la ecuación fundamental:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{86}$$

Observación 6.0.20. *"Contrucción de la Matriz Cambio de Coordenadas "*

Supongamos que tenemos dos tripletas del tipo :

$$((V, \alpha), []_\alpha, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)) \tag{87}$$

$$((V, \beta), []_\beta, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)) \tag{88}$$

donde $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ *entonces*

Para cada vector $v \in V$ *tenemos dos ecuaciones fundamentales*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \Longleftrightarrow [v]_\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{90}$$

¿ Existe alguna relación entre (89) y (90)?

Para responder esa interrogante podemos hacer lo siguiente :

(i) *Aplicando la fórmula (90), a cada uno de los elementos de la base α obtenemos*

$$\begin{array}{rcl} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots a_{n1}w_n & \Longleftrightarrow & [v_1]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots a_{n2}w_n & \Longleftrightarrow & [v_2]_\beta = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \\ & \vdots & \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots a_{nn}w_n & \Longleftrightarrow & [v_n]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) *La información de los elementos de la base α respecto de la base β puede ser organizada en una matriz de la forma :*

$$[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta [v_2]_\beta \dots [v_n]_\beta) \tag{91}$$

O bien

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{92}$$

(iii) *Finalmente*

$$
\begin{aligned}
[I]_{\alpha}^{\beta}[v_1]_{\alpha} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\
&= [v_1]_{\beta}
\end{aligned}
$$

Así que,

(93) $$[I]_{\alpha}^{\beta}[v_i]_{\alpha} = [v_i]_{\beta} \quad (1 \le i \le n)$$

En general tenemos el siguiente

Teorema 6.0.21.

Si γ es una base de V entonce

(i) $[u+v]_{\gamma} = [u]_{\gamma} + [v]_{\gamma} \quad (\forall u; u \in V); \ (\forall v; v \in V)$

(ii) $[c \cdot u]_{\gamma} = c \cdot [u]_{\gamma} \quad (\forall u; u \in V); \ (\forall c; c \in \mathbb{K})$

En efecto

$$
\begin{aligned}
[u]_{\gamma} + [v]_{\gamma} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} \\
&= [u+v]_{\gamma}
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
[c \cdot u]_{\gamma} &= \begin{pmatrix} c \cdot b_1 \\ \vdots \\ c \cdot b_n \end{pmatrix} \\
&= c \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= c \cdot [u]_{\gamma}
\end{aligned}
$$

Corolario 6.0.22.

Para cada $u \in V$

$$[I]_{\alpha}^{\beta}[u]_{\alpha} = [u]_{\beta} \tag{94}$$

En efecto

$$u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \qquad \text{equivalentemente} \qquad [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

luego,

$$\begin{aligned}
[I]_{\alpha}^{\beta}[u]_{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\beta}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right]_{\alpha} \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i\, [I]_{\alpha}^{\beta}[v_i]_{\alpha} && \text{ver (6.0.21)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i [v_i]_{\beta} && \text{ver (93)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} [b_i v_i]_{\beta} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right]_{\beta} \\
&= [u]_{\beta}
\end{aligned}$$

Corolario 6.0.23.
$[I]_{\alpha}^{\beta}[I]_{\beta}^{\alpha} = I_n$

En efecto

sabemos de (6.0.22), que

$$[I]_{\alpha}^{\beta}[u]_{\alpha} = [u]_{\beta} \quad (\forall u; u \in V)$$

entonces

$$\begin{aligned}
[I]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}[u]_{\alpha} &= [I]_{\beta}^{\alpha}[u]_{\beta} \quad (\forall u; u \in V) \\
&= [u]_{\alpha}
\end{aligned}$$

En particular;

$$\begin{aligned}
[I]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}[v_i]_{\alpha} &= [I]_{\beta}^{\alpha}[v_i]_{\beta} \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n) \\
&= [v_i]_{\alpha}
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
[I]_{\alpha}^{\beta}[I]_{\beta}^{\alpha}[w_i]_{\beta} &= [I]_{\alpha}^{\beta}[w_i]_{\alpha} \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n) \\
&= [w_i]_{\beta}
\end{aligned}$$

Así que

$$[I]_\beta^\alpha\,[I]_\alpha^\beta = [I]_\alpha^\beta\,[I]_\beta^\alpha = I_n$$

Conclusión 6.0.24.

$[I]_\alpha^\beta$ *es una matriz invertible y*

(1) $\left[[I]_\alpha^\beta\right]^{-1} = [I]_\beta^\alpha$

(2) *Tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{V} \\ {\scriptstyle [\,]_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\,]_{\beta)}} \\ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1) & \xrightarrow[{[I]_\alpha^\beta}]{} & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1) \end{array}$$

Figura 11

Equivalentemente

$$\begin{aligned} \left[[I]_\alpha^\beta\right]\circ[\,]_\alpha &= [\,]_\beta \\ \left[[I]_\beta^\alpha\right]\circ[\,]_\beta &= [\,]_\alpha \end{aligned}$$

Definición 6.0.25.

$[I]_\alpha^\beta$, será llamada la matriz cambio de la base α a la base β.

Ejemplo 6.0.26.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, una base de V. Sea $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_i = \sum_{j=1}^{i} j v_j$, para $(1 \le i \le n)$ entonces

(1) β es una base de V

En efecto

$w_i = \sum_{j=1}^{i} j v_j$, para $(1 \le i \le n)$ entonces $w_{i+1} = (i+1)v_{i+1} + w_i$, así que $v_{i+1} = \dfrac{w_{i+1} - w_i}{i+1}$, para $i \ge 2$ y $v_1 = w_1$, luego

$$v_{i+1} = -\frac{1}{i+1}w_i + \frac{1}{i+1}w_{i+1} \in \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \tag{95}$$

luego,

$$V = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

entonces β es una base de V.

(2) $w_i = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + iv_i$ entonces

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(3) Como, $v_i = -\frac{1}{i}w_{i-1} + \frac{1}{i}w_i$ entonces

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$$

6.1. Ejercicios Resueltos.

(1) Sean S_1 y $S_2 = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$[I]_{S_1}^{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de la base S_1 a la base S_2

(a) Determine la base S_1

Solución

Sea $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Si la matriz de cambio de base es $[I]_{S_1}^{S_2}$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (2,1,2) \\ u_2 &= -1(1,0,1) - 2(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (4,-1,0) \\ u_3 &= 1(1,0,1) + 1(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (1,2,2) \end{aligned}$$

De donde : $S_1 = \{(2,1,2), (4,-1,0), (1,2,2)\}$

(b) Para $\alpha = (1,2,3)$, determine $[\alpha]_{S_1}$

Solución

$$
\begin{aligned}
[\alpha]_{S_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Longrightarrow (1,2,3) = a(2,1,2) + b(4,-1,0) + c(1,2,2) \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = 2a + 4b + c \\ 2 = a - b + 2c \\ 3 = 2a + 2c \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow a = \tfrac{3}{2}\,, b = -\tfrac{1}{2}\,, c = 0 \\
&\Longrightarrow [\alpha]_{S_1} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) Sea $\beta = \{(1,0,-1),(-1,1,0),(1,1,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ y considera $\mu \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$
[\mu]_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Encuentre μ.

Solución

$$
[\mu]_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mu = 6(1,0,-1) - 3(-1,1,0) + 2(1,1,1) = (11,-1,-4)
$$

(3) Sea $C = \{1, x, x^2\}$ y $S_2 = \{1 + x + x^2, -2 - x + x^2, -1 + x + x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$.

Hallar $[I]_{S_2}^C$ la matriz cambio de base desde S_2 a la base C

Solución

Las columnas C_j $(1 \leq j \leq 3)$ de la matriz $[I]_{S_2}^C$ son tales que :

$$
C_j = [u_j]_C \text{ donde } u_j \in S_2 \Longrightarrow [I]_{S_2}^C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

(4) Sea V un $k - e.v$ y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Se define $\beta = \{w_1, w_2 \cdots, w_n\}$ (otra base de V)como $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j v_j$

(a) Determine $[I]_\beta^\alpha$

Solución

De la definición de β se tiene:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sum_{j=1}^{1} jv_j = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\
w_2 &= \sum_{j=1}^{2} jv_j = v_1 + 2v_2 = 1v_1 + 2v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
w_3 &= \sum_{j=1}^{3} jv_j = v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 0v_4 + \cdots + 0v_n \\
\vdots & \qquad \vdots \\
w_n &= \sum_{j=1}^{n} jv_j = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n
\end{aligned}
$$

Lo que implica: $[w_1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [w_2]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, [w_n]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

Finalmente $[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & n \end{pmatrix}$

(b) Si v es un vector de V tal que $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ calcular $[v]_\beta$

Solución

Como $[I]_\beta^\alpha$ es invertible y $\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} = [I]_\alpha^\beta$ y además

$$[I]_\alpha^\beta [v]_\alpha = [v]_\beta$$

entonces: $$\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 & -1/2 & 0\cdots & & 0 & 0 \\ & 0 & 1/2 & -1/3 & 0\cdots & & 0 \\ & 0 & 0 & 1/3 & -1/4\cdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \cdots & & & 1/n \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} & 1 & -1/2 & 0\cdots & & 0 & 0 \\ & 0 & 1/2 & -1/3 & 0\cdots & & 0 \\ & 0 & 0 & 1/3 & -1/4\cdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \cdots & & & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Objetivos Generales

(1) Construir una conexión válida (natural) entre espacios vectoriales.
(2) Verificar la importancia de los isomorfismos de espacios vectoriales.
(3) Clasificar a través de la dimensión los espacios vectoriales finito dimensionales.

8. Motivación

(1) Sabemos del capítulo anterior que, para cada espacio vectorial existe una tripleta fundamental, “$((V,\alpha), [\ ]_\alpha, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1))$.”

Donde; $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y para cada $v \in V$ vale la equivalencia fundamental.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V \iff [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \tag{96}$$

Luego, si queremos conectar espacios vectoriales entonces debemos conectar tripletas fundamentales.

(2) Sea W un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de W, entonces tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
(V,\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_\alpha}"'] & (W,\beta) \arrow[d, "{[\ ]_\beta}"] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_\alpha^\beta}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 12

Donde T es una función de V en W y probablemente, $[T]_\alpha^\beta$ sea una matriz.

(3) Ahora como queremos que se verifique la conmutatividad del diagrama, es decir, queremos que para cada $v \in V$, se verifique la igualdad fundamental :

$$[T]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha = [T(v)]_\beta \tag{97}$$

Y, como sabemos que para cualquier base, γ, tenemos que se verifican

$$[u+v]_\gamma = [u]_\gamma + [v]_\gamma \tag{98}$$

$$[\lambda u]_\gamma = \lambda [u]_\gamma \tag{99}$$

Entonces naturalmente le pediremos que T preserve también la operaciones del espacio, por una parte y por otra que preserve también la nueva escritura o nueva representación empleada para los vectores, como combinación lineal de los elementos de una base.

9. Definición y ejemplos

Definición 9.0.1.

Sean V y W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y T una función de V en W entonces diremos que T es una " Transformación Lineal " del espacio V en el espacio W si

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para $u \in V$ y $v \in V$
(2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para $u \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

Usaremos la notación

$$\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{T \mid T : V \longmapsto W \text{ transformación lineal}\} \tag{100}$$
$$\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,V) \tag{101}$$

Ejemplo 9.0.2.

Uno del tipo clásico en $\mathbb{R}^n$

(1) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (x-y+z, x+z)$ entonces

$T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

En efecto

Algoritmo o procedimiento de trabajo:

(i) Entendiendo (decodificando)el problema, la acción de T es. Transforma un trío u en un par $T(u)$.

(ii) Introduciendo e interpretando datos del dominio de T.
- $u \in \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow u = (u_1,u_2,u_3) \wedge u_i \in \mathbb{R}\ (i = 1,2,3)$
- $v \in \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow v = (v_1,v_2,v_3) \wedge v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1,2,3)$
- entonces $u + v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \in \mathbb{R}^3$

(iii) p.d.q. $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)) \\
&= ((u_1+v_1) - (u_2+v_2) + (u_3+v_3), (u_1+v_1) + \\
&\quad (u_3+v_3)) \\
&= (u_1+v_1-u_2-v_2+u_3+v_3, u_1+v_1+u_3+v_3) \\
&= ([u_1-u_2+u_3] + [v_1-v_2+v_3], [u_1+u_3] + \\
&\quad [v_1+v_3]) \\
&= (u_1-u_2+u_3, u_1+u_3) + (v_1-v_2+v_3, v_1+v_3) \\
&= T((u_1,u_2,u_3)) + T((v_1,v_2,v_3)) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

(iv) p.d.q. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T((\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)) \\ &= (\lambda u_1 - \lambda u_2 + \lambda u_3, \lambda u_1 + \lambda u_3) \\ &= \lambda(u_1 - u_2 + u_3, u_1 + u_3) \\ &= \lambda T((u_1, u_2, u_3)) \\ &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

Así que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(, \mathbb{R}^3 \mathbb{R}^2)$

Ejemplo 9.0.3.

Información:

(1) Sean V y W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales

(2) $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base cualquiera de V y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectores arbitrarios de W

(3) $T(v_i) = u_i$ para $i = 1, 2 \ldots n$

Determine una transformación lineal

$$T \ : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

Tal que verifique las condiciones anteriores.

Solución

(1) Problema :¿ $T(v) =?$, para cada $v \in V$

(2) Datos :

- Como $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V entonces "sabemos" que para cada $v \in V$ la ecuación

(102) $$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

tiene solución única.

- Aplicamos T a la ecuación (102) y hacemos que a fortiori cumpla con la linealidad, es decir:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n) \\ &= a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n) \\ &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \end{aligned}$$

Así que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$

10. Representación Matricial de T

Observación 10.0.4.

Supongamos que en el ejemplo anterior, $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base de W.

(1) Como $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces "sabemos" que cada $v \in V$ se representa en forma única:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \iff [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Luego,

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)$$

Así que

$$\begin{aligned}
[T(v)]_\beta &= [a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)]_\beta \\
&\Longrightarrow [T(v)]_\beta = a_1[T(v_1)]_\beta + a_2[T(v_2)]_\beta + \cdots + a_n[T(v_n)]_\beta \\
&\Longrightarrow [T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow [T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \end{pmatrix} [v]_\alpha
\end{aligned}$$

Definición 10.0.5.

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base de W entonces

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m \times n) \tag{103}$$

Se llama representación matricial o matriz de la transformación lineal T, respecto de la bases α y β

Ejemplo 10.0.6.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 3z)$ y consideremos las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente

$$\begin{aligned}
\alpha &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \text{ y} \\
\beta &= \{(1, 1), (1, -1)\}
\end{aligned}$$

entonces la observación anterior sugiere el siguiente algoritmo o procedimiento:

Etapa 1. Sabemos que

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} [T(1,1,1)]_\beta & [T(1,1,0)]_\beta & [T(1,0,0)]_\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times 3) \tag{104}$$

Etapa 2. Calculamos $[T(x,y,z)]_\beta$, para cualquier $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$!!!.

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= a_1(1,1)+a_2(1,-1) \Longleftrightarrow \\ (x+y+z, x-y+3z) &= (a_1+a_2, a_1-a_2) \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2 &=& x+y+z \\ a_1-a_2 &=& x-y+3z \end{array}\right| \quad \text{luego} \quad a_1 = x+2z \wedge a_2 = y-z$$

Así que,

$$[T(x,y,z)]_\beta = \begin{pmatrix} x & + & 2z \\ y & - & z \end{pmatrix} \tag{105}$$

Etapa 3. Aplicando la fórmula (105)en (104) tenemos que la matriz pedida es.

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos guardar lo anterior en el siguiente teorema central

Teorema 10.0.7.

Si $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ y $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es una base de V y $\beta=\{w_1,w_2,\dots,w_m\}$ es una base de W entonces

- $[T]_\alpha^\beta \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times n)$
- $[T]_\alpha^\beta[v]_\alpha = [T(v)]_\beta$

Observación 10.0.8.

La conección anterior entre la teoría y la práctica, siempre hace referencia a las bases α y β de los espacios vectoriales involucrados, pero en realidad esto no es una restricción sino más bien una holgura.

En efecto

Supongamos que tenemos las nuevas bases α' y β' de V y W, respectivamente entonces podemos determinar las nuevas matrices:

- $[T]_{\alpha'}^{\beta'}$
- $[T]_{\alpha}^{\beta'}$
- $[T]_{\alpha'}^{\beta}$

Pregunta ¿ tienen alguna relación entre si esta matrices ?. Para responder a esto hechamos mano a la siguiente herramienta matemática:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha') \arrow[r, "1_{\mathbb{V}}"] \arrow[d, "{[\ ]_{\alpha'}}"'] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_{\alpha}}"'] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "1_{\mathbb{W}}"] \arrow[d, "{[\ ]_{\beta}}"'] & (\mathbb{W},\beta') \arrow[d, "{[\ ]_{\beta'}}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[I]_{\alpha'}^{\alpha}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_{\alpha}^{\beta}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1) \arrow[r, "{[I]_{\beta}^{\beta'}}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 13

Es decir, como $T = 1_{\mathbb{W}} \circ T \circ 1_{\mathbb{V}}$ entonces

$$[T]_{\alpha'}^{\beta'} \;=\; [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$$

Análogamente, para los otros casos tenemos que:

$$[T]_{\alpha'}^{\beta} \;=\; [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha'}^{\alpha}$$

$$[T]_{\alpha}^{\beta'} \;=\; [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [T]_{\alpha}^{\beta}$$

11. Clasificación de Espacios Vectoriales

(1) Descripción del problema:

“Dados dos espacios vectoriales V y W, como saber si ellos son efectivamente distintos, en el siguiente sentido, uno posee, por ejemplo, propiedades geométricas que el otro no tiene.”

(2) Análisis del problema.

Para partir volvamos al ejemplo general (9.0.3).

Sea $T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ entonces $T(\alpha)$ es linealmente independiente o linealmente dependiente en W.

Caso 1. $T(\alpha)$ linealmente dependiente.

Entonces de la definición de dependencia lineal sigue que: existe una combinación lineal nula de la forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_W$ y tal que alguno de los a_i es no nulo.

Luego podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_W &\iff \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = 0_W \\ &\iff T\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{\neq 0_V}\right) = 0_W\end{aligned}$$

Pero, como T es una transformación lineal entonces $T(0_V) = 0_W$. Así que

$T\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = T(0_V) = 0_W$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \neq 0_V$, luego.

T no es inyectiva

Lo anterior motiva para definir al siguiente conjunto:

(106) $$ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$

Será llamado el núcleo o kernel de T

Lo que hemos visto es que

$$T(\alpha) \text{ linealmente dependiente} \implies ker(T) \neq \{0_V\}$$

Lo anterior puede archivarse en el siguiente:

Teorema 11.0.9.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ entonces

- $ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$, *es un subespacio de V*
- $Img(T) = \{T(v) \in W \mid v \in V\}$, *el recorrido o imagen de T es un subespacio de W*
- $ker(T) = \{0_V\} \Longrightarrow T$ *inyectiva*

En efecto

(i) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ entonces $T(0_V) = 0_W$, así que $0_V \in ker(T)$ y

$ker(T) \neq \emptyset$

(ii) Si $u \in ker(T) \wedge v \in ker(T)$ entonces $T(u) = 0_W \wedge T(v) = 0_W$. por tanto:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) \\ &= 0_W + 0_W \\ &= 0_W \end{aligned}$$

Luego, $(u+v) \in ker(T)$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot T(u) \\ &= \lambda \cdot 0_W \\ &= 0_W \end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in ker(T)$. Así que $ker(T)$ es un subespacio de V

Análogamente para la imagen o recorrido de T tenemos que.

(i) $T(0_V) = 0_W$ entonces $0_W \in img(T)$ e $Img(T) \neq \emptyset$

(ii) Si $u \in Img(T) \wedge v \in Img(T)$ entonces $T(u) = u_W \in W \wedge T(v) = v_W \in W$. por tanto:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) \\ &= u_W + v_W \end{aligned}$$

Luego, $(u+v) \in Img(T)$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot T(u) \\ &= \lambda \cdot u_W \end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in Img(T)$. Así que $Img(T)$ es un subespacio de V

Finalmente T no inyectiva entonces $ker(T) \neq \{0_V\}$

Caso 2. $T(\alpha)$ linealmente independiente.

(i) Entonces $ker(T) = \{0_V\}$

En efecto

$$\begin{aligned}
v \in ker(T) &\iff v \in V \quad \wedge \quad T(v) = 0_W \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = 0_W \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = 0_W \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_W \\
&\overset{T(\alpha)Li}{\Longrightarrow} v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad a_i = a_2 = \cdots = a_n = 0 \\
&\Longrightarrow v = 0_V
\end{aligned}$$

(ii) $dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = n \leq dim_{\mathbb{K}}(W)$

En efecto

$$\begin{aligned}
w \in Img(T) &\iff (\exists v; v \in V) \quad \wedge \quad T(v) = w \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = w \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = w \\
&\iff w \in \langle\{T(v_1), T(v_2); \dots, T(v_n)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$Img(T) = \langle\{T(v_1), T(v_2); \dots, T(v_n)\}\rangle \wedge T(\alpha) \text{ Li}$$

entonces $dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = n \leq dim_{\mathbb{K}}(W)$

Todo lo anterior lo vamos a sintetizar en el siguiente:

Teorema 11.0.10. *Teorema de la dimensión*

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ entonces

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}} ker(T) + dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) \tag{107}$$

En efecto

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ entonces tenemos dos y sólo dos posibilidades para el núcleo de T

(1) $ker(T) = \{0_V\}$.

En tal caso, T es inyectiva y $dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = n$, así que

$$n = dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(ker(T)) + dim_{\mathbb{K}}(Img(T))$$

(2) $ker(T) \neq \{0_V\}$.

En este caso, T no es inyectiva y podemos suponer que:

- $dim_{\mathbb{K}} ker(T) = s \geq 1$
- $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ es una base de $ker(T)$.

Además podemos agregar vectores linealmente independientes en V, hasta obtener una base para V. Digamos

$$\beta' = \{v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n\}$$

Así que, β' es una base de V, que satisface la propiedad:

$$T(v_j) = \begin{cases} 0_V & : \ 1 \leq i \leq s \\ \neq 0_V & : \ s+1 \leq j \leq n \end{cases} \tag{108}$$

Luego, para cada $v \in V$ tenemos que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) \\ &= \sum_{i=s+1}^{n} a_i T(v_i) \end{aligned}$$

(3) Así que, $dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) = n - s$,

Ejemplo 11.0.11.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (x+y+z, x+y-3z, z)$ entonces

$$\begin{aligned}
u \in ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad T(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad (x+y+z, x+y-3z, z) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad (z = 0 \wedge y = -x) \\
&\iff u = (x,-x,0) \\
&\iff u = x(1,-1,0) \\
&\iff u \in \langle \{(1,-1,0)\} \rangle
\end{aligned}$$

Así que; $ker(T) = \langle \{(1,-1,0)\} \rangle$ y T no es inyectiva. Ahora aplicando el teorema de la dimensión tenemos que:

$$dim_{\mathbb{R}}(ker(T)) = 1 \qquad \wedge \qquad dim_{\mathbb{R}}(Img(T)) = 2$$

Una consecuencia inmediata del teorema de la dimensión (11.0.10) es

Corolario 11.0.12.

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$ entonces

T inyectiva $\iff$ T sobreyectiva

Definición 11.0.13.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$, diremos que T es un Isomorfismo si T es una biyección, es decir es inyectivo y sobreyectivo.
Si T es un isomorfismo entonces diremos que V y W son espacios isomorfos. Lo cual será notado por $V \cong W$

Ejemplo 11.0.14. *Conceptuales*

(1) Si $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ entonces $V \cong \mathbb{K}^n$.

En efecto Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $c(n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$, (en realidad, puedes tomar cualquier base de $\mathbb{K}^n$) y define un isomorfismo, digamos T_α, como sigue:

(i) $T(v_i) = e_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$

(ii) Finalmente extiende T usando a fortiori el concepto de linealidad, es decir;

Si $v \in V$ y como α es base entonces $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Luego,

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

- $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}^n)$, pues si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ entonces

$$
\begin{aligned}
T(\lambda u + v) &= T\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} b_i v_i + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} [(\lambda b_i) v_i + a_i v_i]\right) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} [(\lambda b_i) + a_i] v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(\lambda b_i) + a_i] e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(\lambda b_i e_i) + a_i e_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda b_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i T(v_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) \\
&= \lambda T\left(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\
&= \lambda T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

- Para mostrar que T es un isomorfismo, aplicamos (11), es decir que T es inyectiva o que su Núcleo es nulo.

$$
\begin{aligned}
v \in \text{Núcleo } (T) &\iff v \in V \quad \wedge \quad T(v) = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0_V \\
&\implies a_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, n); \quad \text{ya que } c(n) \text{ es base de } \mathbb{K}^n
\end{aligned}
$$

Luego,

$v = 0_V$ y Núcleo $(T) = \{0_V\}$

Conclusión 11.0.15.

Podemos observar rápidamente lo siguiente

- Dos espacios isomorfos son " una misma historia, salvo porque sus personajes posiblemente han cambiado de nombre "

- Si $V \cong W$ y $W \cong U$ entonces $V \cong U$.

  En efecto

  Basta observar que la compuesta de transformaciones lineales es nuevamente una transformación lineal y que la compuesta de biyecciones es biyección, es decir

$$\mathbb{V} \overset{T}{\longmapsto} \mathbb{W} \overset{L}{\longmapsto} \mathbb{U} \Longleftrightarrow \mathbb{V} \overset{L\circ T}{\longmapsto} \mathbb{U}$$

- En particular, para un isomorfismo tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{V},\alpha) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\,]_\alpha}"'] & (\mathbb{W},\beta) \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "{[\,]_\beta}"'] & (\mathbb{V},\alpha) \arrow[d, "{[\,]_\alpha}"'] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T]_\alpha^\beta}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \arrow[r, "{[T^{-1}]_\beta^\alpha}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1)
\end{tikzcd}$$

Figura 14

Así que tenemos la dualidad

$$T^{-1}\circ T = 1_V \quad \Longleftrightarrow \quad \left[T^{-1}\right]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\beta = I_n$$

Así T es un isomorfismo y,

$$\left([T]_\alpha^\beta\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_\beta^\alpha$$

(2) $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,W) \cong \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(dim_{\mathbb{K}}(W)\times dim_{\mathbb{K}}(V)$

En efecto

Define

$$\psi \ : \ \mathbb{L}_{\mathbb{K}}((V,\alpha),(W,\beta)) \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(dim_{\mathbb{K}}(W)\times dim_{\mathbb{K}}(V))$$

tal que

$$\psi(T) \quad = \quad \begin{pmatrix} [v_1]_\beta & [v_2]_\beta & [v_3]_\beta \cdots [v_n]_\beta \end{pmatrix}$$

donde, $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V.

Claramente ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

12. Ejercicios Resueltos

(1) Sean V y W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$, tal que verifique las siguientes condiciones:

- Núcelo $(T) = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_s\}\rangle$
- $Img(T) = \langle\{v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n\}\rangle$

Solución

Etapa 1. ¿ Qué me preguntan ?
Se debe saber ¿ cuánto vale $T(v)$, para cada $v \in V$?

Etapa 2. Datos, osea con lo que cuento, para resolver el problema
Partimos decodificando la información dada en el problema.

- $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V, significa que cada $v \in V$ se escribe de forma única como una combinación lineal de los elementos de α, es decir tenemos

(109)
$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \vee \quad v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

No se asuste por el uso de $\sum$, tomelo más bien como un buen aliado.

- De (109), sigue que

(110)
$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)$$

- Núcelo $(T) = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_s\}\rangle$, significa que

(111)
$$T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_s) = 0_V$$

- $Img(T) = \langle\{v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n\}\rangle$, significa que

(112)
$$u \in Img(T) \iff u = \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i$$

Etapa 3. Finalmente, construimos la solución del problema.

- Como T tiene que ser una transformación lineal entonces obligamos en (110), que

(113)
$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)$$

- Aplicando (111) a (113) tenemos que

$$T(v) = \sum_{i=s+1}^{n} a_i T(v_i) \tag{114}$$

- Como $\{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente entonces basta definir $T(v_j) = v_j$, para $j = s+1, s+2, \dots, n$, así que (114) queda como

$$T(v) = \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i \tag{115}$$

Una última observación, podíamos haber construido una nueva base de V, digamos $\beta = \{v_1, \dots, v_s, w_{s+1}, w_{s+2}, \dots, w_n\}$ y definir al igual que antes:

- $T(v_i) = 0$, para $i = 1, 2 \dots, s$
- $T(w_j) = v_j$, para $j = s+1, s+2, \dots, n$

y obtenemos, ciertamente otra transformación lineal, que verifica las condiciones pedidas.!!!

(2) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Demuestre que

(a) T inyectiva $\Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) \leq dim_{\mathbb{K}}(W)$

(b) T sobreyectiva $\Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(W) \leq dim_{\mathbb{K}}(V)$

(c) T isomorfismo $\Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$

En efecto

La herramienta fundamental será el teorema de la dimensión, es decir

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}\text{Núcleo } (T) + dim_{\mathbb{K}} Img(T) \tag{116}$$

$$\begin{aligned} T \text{ inyectiva} &\Longleftrightarrow \text{Núcleo } (T) = \{0_V\} \\ &\Longleftrightarrow dim_{\mathbb{K}}\text{Núcleo } (T) = 0 \\ &\Longleftrightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}} Img(T) \leq dim_{\mathbb{K}}(W) \end{aligned}$$

$$T \text{ sobreyectiva} \Longleftrightarrow dim_{\mathbb{K}} Img(T) = dim_{\mathbb{K}}(W)$$

Luego;

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{K}}(V) &= dim_{\mathbb{K}}\text{Núcleo } (T) + dim_{\mathbb{K}} Img(T) \\ &= dim_{\mathbb{K}}\text{Núcleo } (T) + dim_{\mathbb{K}}(W) \\ &\geq dim_{\mathbb{K}}(W) \end{aligned}$$

Así que

$dim_{\mathbb{K}}(V) \leq dim_{\mathbb{K}}(W)$ y $dim_{\mathbb{K}}(W) \leq dim_{\mathbb{K}}(V)$

Luego;

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$$

13. Ejercicios Propuestos

(1) Demuestre que las siguientes funciones son transformaciones líneales:

(i) $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$; tal que $T(x, y, z) = (x + y - z, x - y - z)$

(ii) $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$; tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, x - 3y)$

(iii) $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$; tal que $T(u) = 2u; \qquad u \in \mathbb{R}^n$

(iv) $T : \mathbb{R}_3[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$; tal que $T\left(\sum_{i=0}^{3} a_i x^i\right) = a_2 + a_0 x - a_1 x^2$

(v) $T : \mathbb{R}_{n+1}[x] \longmapsto \mathbb{R}_n[x]$; tal que $T\left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i\right) = \sum_{j=0}^{n} j a_j x^j$

(vi) $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$; tal que $T(a_{ij}) = (a_{ji})$

(2) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que núcleo$(T) = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$

(3) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathrm{Img}(T) = \langle\{(2, -3, 1)\}\rangle$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que núcleo$(T) = \langle\{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\}\rangle$ e $\mathrm{Img}(T) = \langle\{(1, 0, 0)\}\rangle$

(5) Si $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$; tal que $T(x, y, z) = (x + y - z, x - y - z)$; determine $[T]_{c(3)}^{c(2)}$

(6) Si $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$; tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, x - 3y)$; determine $[T]_{c(2)}^{c(3)}$

(7) Si $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$; tal que $T(u) = 2u; \qquad u \in \mathbb{R}^n$; determine $[T]_{c(n)}^{c(n)}$

(8) Si $T : \mathbb{R}_3[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$; tal que $T\left(\sum_{i=0}^{3} a_i x^i\right) = a_2 + a_0 x - a_1 x^2$; determine $[T]_{p(3)}^{p(2)}$

(9) $T : \mathbb{R}_{n+1}[x] \longmapsto \mathbb{R}_n[x]$; tal que $T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j x^{j-1}$; determine $[T]_{p(n+1)}^{p(n)}$

(10) $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$; tal que $T(a_{ij}) = (a_{ji})$; determine$[T]_{m(3)}^{m(3)}$

(11) Sean $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(x, y) = (x+2y, x-y)$ y $\alpha = \{(1, -2), (3, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$

- Determine $[T]_{\alpha}^{\alpha}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{c(2)}$

- Determine $[T]_{c(2)}^{\alpha}$
- Calcule $[T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{c(2)}$
- Calcule $[I]_{c(2)}^{\alpha} \cdot [T]_{c(2)}^{c(2)} \cdot [I]_{\alpha}^{c(2)}$
- Calcule $[I]_{\alpha}^{c(2)} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{c(2)}^{\alpha}$

(12) Considera $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que, $T(x,y,z) = (x+2y+2z, x+y, 2y-z)$ y una base de $\mathbb{R}^3$ $\alpha = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

- Determine $[T]_{\alpha}^{\alpha}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{c(3)}$
- Determine $[T]_{c(3)}^{\alpha}$
- Calcule $[T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{c(3)}$
- Calcule $[I]_{c(3)}^{\alpha} \cdot [T]_{c(3)}^{c(3)} \cdot [I]_{\alpha}^{c(3)}$
- Calcule $[I]_{\alpha}^{c(3)} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{c(3)}^{\alpha)}$

(13) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_3[x])$ definida por $T(p(x)) = x^2p(x)$ y considera las bases $\alpha = \{1, x\}$, y $\alpha' = \{x, x+1\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ y la base $\beta = \{x, x+1, x^2+1, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$

- Determine $[T]_{\alpha}^{p(3)}$
- Determine $[T]_{\alpha'}^{p(3)}$
- Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$

(14) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que

$$T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2); \ldots, T(v_n)\} \text{ base de } V \Longrightarrow T \text{ inyectiva}$$

(15) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que

$$T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2); \ldots, T(v_n)\} \text{ base de } V \Longrightarrow T \text{ sobreyectiva}$$

(16) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial V. Sea

$$V^* = \{T : V \longmapsto \mathbb{K} \mid T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})\}$$

(i) Demuestre que V^* es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial

(ii) Sea $\alpha^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ tal que $v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$. Demuestre que

- $v_i^* \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$; para $i = 1, 2, \ldots, n$

- α^* es una base de V^*

CAPITULO 3

Introducción al Proceso de Diagonalización

1. Valores y Vectores Propios

1.1. Objetivos.

(1) Determinar los criterios mínimos para representar un operador a través de una matriz diagonal.

(2) Aplicar los criterios de diagonalización en la resolución de problemas concretos.

1.2. Definición y Ejemplos.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$.
Supongamos que T, se representa en una base α de V, como una matriz diagonal de orden n.

Entonces

(i) Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es la base escogida entonces

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \tag{117}$$

(ii) Como,

$$[T]_\alpha^\alpha = ([T(v_1)]_\alpha [T(v_2)]_\alpha \dots [T(v_n)]_\alpha) \tag{118}$$

entonces de (117), y (118), sigue que:

(a) Se verifica la relación fundamental

$$T(v_i) = \lambda_i v_i \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{119}$$

(b) $\det(T) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(c) T es un isomorfismo si y sólo si $\lambda_i \neq 0 \quad$ para $i = 1, 2, \dots, n$

(d) Para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$ los conjuntos

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid T(v) = \lambda_i v\} \neq \emptyset$$

Observando con atención la sección motivación, podemos concluir lo siguiente:

(1) Para que T se represente como una matriz diagonal de orden n deben suceder al menos las siguientes cuestiones:
- Debe existir, V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$
- Debe existir una base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ de V, un conjunto $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de escalares y una relación como (119), es decir

$$T(v_i) = \lambda_i v_i \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

(2) La relación (119), sugiere que son realmente importantes los conjuntos de la forma, $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$, pues estos conjuntos poseen la importantísima propiedad.

$$v \in V_\lambda \Longrightarrow \langle\{v\}\rangle \subset V_\lambda \tag{120}$$

Lo que (120), quiere decir es que, "**si en V_λ entra un vector entonces la recta generada por el vector se queda en V_λ**"

(3) Ciertamente son importantes estos conjuntos, V_λ pero hay al menos dos problemas:

Problema 1.

$$\lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow V_\lambda \neq \emptyset \tag{121}$$

En efecto

$$0_V \in V \quad \wedge \quad T(0_V) = 0_V = \lambda \cdot 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow 0_V \in V_\lambda$$

Así que, son demasiados.

Problema 2.

Si $v \in V_\lambda$ entonces vale la relación fundamental $T(v) = \lambda v$, pero de los tres datos sólo conocemos uno de ellos, T, así que vale la pregunta

$$\text{¿ Qué es primero } \lambda \text{ o } v \text{ ?} \tag{122}$$

Sea cual sea la respuesta, el problema es, que no podemos resolver así la ecuación fundamental. Propongo como estrategia estudiar más detenidamente estos enigmáticos V_λ.

Lema 1.2.1.

V_λ. es un subespacio de V, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$

En efecto
- Sabemos que $V_\lambda \neq \emptyset$
- Sean $u \in V_\lambda$, $v \in V_\lambda$ y $k \in \mathbb{K}$ entonces

$$u \in V_\lambda \iff u \in V \wedge T(u) = \lambda u \tag{123}$$

$$v \in V_\lambda \iff v \in V \wedge T(v) = \lambda v \tag{124}$$

Así que, de (123) y (124)y del hecho que T es una transformación lineal, sigue que:

$$u + v \in V \wedge T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$$

Luego, $(u + v) \in V_\lambda$

Análogamente,

$$ku \in V \wedge T(ku) = kT(u) = k\lambda u = \lambda(ku)$$

Luego, $ku \in V_\lambda$

Lo anterior muestra que V_λ, es un subespacio de V.

Observación 1.2.2.

Supongamos por un instante que existe $v \in V_\lambda$ y que $v \neq 0$ entonces debe acontecer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
v \in V_\lambda &\iff v \in V \wedge T(v) = \lambda v\\
&\iff v \in V \wedge \lambda v - T(v) = 0_V\\
&\iff v \in V \wedge \lambda 1_V(v) - T(v) = 0_V\\
&\iff v \in V \wedge (\lambda 1_V - T)(v) = 0_V\\
&\iff v \in V \wedge v \in \text{ núcleo } (\lambda 1_V - T)\\
&\iff v \in V \wedge (\lambda 1_V - T) \text{ no es inyectiva}\\
&\iff v \in V \wedge \det(\lambda 1_V - T) = 0\\
&\iff v \in V \wedge \det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha = 0,\ \alpha \text{ base arbitraria de V}
\end{aligned}$$

Pero, ¿ qué significa que $\det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha = 0$?

Pongamos un ejemplo para aclarar, lo que estamos haciendo:

Ejemplo 1.2.3.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ y $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una base de V entonces

(1) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

(2) $[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda - a_{22}\end{pmatrix}$

(3) Así que $\det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$

Luego, $\det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha$ es un polinomio en la variable λ.

(4) Así que, en este caso

$$\begin{aligned}
v \in V_\lambda &\iff \det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha = 0\\
&\iff \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0\\
&\iff \lambda^2 - \lambda \text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha) + \det([T]_\alpha^\alpha) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \lambda = \frac{\text{tr } ([T]_\alpha^\alpha) \pm \sqrt{(\text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha))^2 - 4\det \text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha)}}{2}$$

$$\iff \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr } ([T]_\alpha^\alpha) + \sqrt{(\text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha))^2 - 4\det \text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha)}}{2}\\[2ex] \lambda_2 = \frac{\text{tr } ([T]_\alpha^\alpha) - \sqrt{(\text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha))^2 - 4\det \text{ tr } ([T]_\alpha^\alpha)}}{2}\end{cases}$$

(5) Si llamamos $P_T(\lambda) = \det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha$ entonces

$$P_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \tag{125}$$

(6) Preste mucha atención, las siguientes ideas son fundamentales:

(i) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces tenemos dos subespacios no triviales,(!!!)

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \{v \in V \mid T(v) = \lambda_1 v\} \\ V_{\lambda_2} &= \{v \in V \mid T(v) = \lambda_2 v\} \end{aligned}$$

en particular, $dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) = dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_2}) = 1$

En efecto

$$\begin{aligned} v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} &\iff \lambda_1 v = \lambda_2 v \\ &\iff (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V \\ &\implies v = 0_V \end{aligned}$$

Luego,

(126) $$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$$

Por otra parte, Si $w_1 \in V_{\lambda_1}$ y $w_2 \in V_{\lambda_2}$, ambos no nulos entonces $\beta = \{w_1, w_2\}$, es un conjunto Li. y por tanto una base de V.

En efecto

(127) $$a_1 w_1 + a_2 w_2 = 0_V \implies T(a_1 w_1 + a_2 w_2) = T(0_V)$$
(128) $$\implies a_1 \lambda_1 w_1 + a_2 \lambda_2 w_2 = 0_V$$

Luego, tenemos el sistema fundamental:

$$\begin{array}{lcll} a_1 w_1 & + & a_2 w_2 & = 0_V \\ a_1 \lambda_1 w_1 & + & a_2 \lambda_2 w_2 & = 0_V \end{array}$$

De este sistema sigue que

$$\begin{array}{lcll} a_1 \lambda_1 w_1 & + & a_2 \lambda_1 w_2 & = 0_V \\ a_1 \lambda_1 w_1 & + & a_2 \lambda_2 w_2 & = 0_V \end{array}$$

Así que,

$$a_2(\lambda_1 - \lambda_2) w_2 = 0_V$$

y luego,

$$a_2 = 0$$

Usando un procedimiento análogo, podemos mostrar que $a_1 = 0$, así que $\beta = \{w_1, w_2\}$, es un conjunto Li.en V.

En este caso, podemos concluir las siguientes cuestiones:

(129) $$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$$

(130) $$dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) = dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_2}) = 1$$

(131) $$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Apelando al diagrama fundamental para este caso:

$$\begin{array}{ccccccc}
(V,\alpha) & \overset{1_V}{\longmapsto} & (V,\beta) & \overset{T}{\longmapsto} & (V,\beta) & \overset{1_V}{\longmapsto} & (V,\alpha) \\
\Big| [\,]_\alpha & & \Big| [\,]_\beta & & \Big| [\,]_\beta & & \Big| [\,]_\alpha \\
\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times 1) & \overset{[I]_\alpha^\beta}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times 1) & \overset{[T]_\beta^\beta}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times 1) & \overset{[I]_\beta^\alpha}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2\times 1)
\end{array}$$

tenemos que:

(132) $$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\beta^\alpha\,[T]_\beta^\beta\,[I]_\alpha^\beta$$

(133) $$\det\,[T]_\alpha^\alpha = \lambda_1\cdot\lambda_2$$

(ii) Si $\lambda_1=\lambda_2$ entonces un único subespacio V_{λ_1} y dos posibilidades:

- $dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1})=2$

  En este caso, tenemos que existe una base de V, $\gamma=\{u_1,u_2\}\subset V_{\lambda_1}$ y se verifican las siguientes propiedades:

  $V=V_{\lambda_1}$

(134) $$[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(135) $$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\gamma^\alpha\,[T]_\gamma^\gamma\,[I]_\alpha^\gamma$$

(136) $$\det\,[T]_\alpha^\alpha = \lambda_1^2$$

- $dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1})=1$

  En este caso, no existe una base de V, tal que T, se represente como una matriz diagonal.

Antes de exhibir otros ejemplos, hagamos algunas definiciones.

Definición 1.2.4.

Sea $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces un vector $v\in V$ se llamará " un vector propio de T ", si

- $v\neq 0_V$
- Existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $T(v)=\lambda v$. Un tal λ se llamará un valor propio de T, asociado al vector propio v.

Definición 1.2.5.

V_λ se llama subespacio propio asociado al valor propio λ

Definición 1.2.6.

$P_T(\lambda)=\det\,[\lambda 1_V - T]_\alpha^\alpha$ se llamará polinomio característico de T.

Observación 1.2.7.

Si llamamos $\partial(p(x))$= grado del polinomio $p(x)$, entonces $\partial(P_T(\lambda))=dim_{\mathbb{K}}(V)$

Ejemplo 1.2.8.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (3x+z, 3y+2z, -z)$
Solución.

Calculemos valores y vectores propios.

(1) **Construimos $P_T(\lambda)$, el polinomio característico de T.**

(i) $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \wedge \qquad [\lambda 1_V]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(ii) $P_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (\lambda-3) & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda-3) & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$

(iii) Así que,

$$P_T(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 3 \quad \vee \quad \lambda_2 = -1$$

Luego, los valores propios son $V.P = \{3, -1\}$

(2) Determinamos los subespacios propios.

(i) Proceso general:

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_\lambda &\Longleftrightarrow u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = \lambda u \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \wedge (3x+z, 3y+2z, -z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+z &=& \lambda x \\ 3y+2z &=& \lambda y \\ -z &=& \lambda z \end{array}\right| \qquad (\star) \end{aligned}$$

(ii) Evaluamos $(\star)$ en los valores propios:

- $\lambda = 3$

  De $(\star)$, sigue que

$$\begin{aligned} u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_3 &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+z &=& 3x \\ 3y+2z &=& 3y \\ -z &=& 3z \end{array}\right| \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \quad \wedge \quad z = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,0);\ x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow u = x(1,0,0) + y(0,1,0) \\ &\Longleftrightarrow \left(\mathbb{R}^3\right)_3 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle \end{aligned}$$

- $\lambda = -1$

De $(\star)$, sigue que

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} &\iff u=(x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{lcl} 3x+z & = & -x \\ 3y+2z & = & -y \\ -z & = & -z \end{array}\right| \\
&\iff u=(x,y,z) \quad \wedge \quad z=-4x:\ y=2x \\
&\iff u=(x,2x,-4x);\ x\in\mathbb{R} \\
&\iff u=x(1,2,-4) \\
&\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1}=\langle\{(1,2,-4)\}\rangle
\end{aligned}
$$

(3) Sea $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,2,-4)\}$ entonces como

$$
[T]_\alpha^\alpha = \left(\ [T(1,0,0)]_\alpha \quad [T(0,1,0)]_\alpha \quad [T(1,2,-4)]_\alpha\ \right) \tag{137}
$$

y,

- $T(1,0,0)=3(1,0,0)$
- $T(0,1,0)=3(0,1,0)$
- $T(1,2,-4)=-(1,2,-4)$

así que sustituyendo en (137) tenemos que

$$
[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{138}
$$

Es una matriz diagonal, o mejor el operador T se representa como una matriz diagonal, en la base de vectores propios α.

Ejemplo 1.2.9. *Sea* $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x,y,z)=(3x+2y+z,3y+2z,-z)$

Solución.

Calculemos valores y vectores propios.

(1) **Construimos $P_T(\lambda)$, el polinomio característico de T.**

(i) $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad [\lambda 1_V]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(ii) $P_T(\lambda)=\det\begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 & -1 \\ 0 & (\lambda-3) & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$

(iii) Así que,

$$
P_T(\lambda)=0 \iff \lambda_1=3 \quad \wedge \quad \lambda_2=-1
$$

Luego, los valores propios son $V.P=\{3,-1\}$

(2) Determinamos los subespacios propios.

(i) Proceso general:

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_\lambda &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = \lambda u \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge (3x+2y+z, 3y+2z, -z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{lcl} 3x+2y+z & = & \lambda x \\ 3y+2z & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

(ii) Evaluamos $(\star)$ en los valores propios:

- $\lambda = 3$

  De $(\star)$, sigue que

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_3 &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{lcl} 3x+2y+z & = & 3x \\ 3y+2z & = & 3y \\ -z & = & 3z \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad z = 0;\ y = 0 \\
&\iff u = (x,0,0);\ x \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(1,0,0) \\
&\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_3 = \langle\{(1,0,0)\}\rangle
\end{aligned}
$$

- $\lambda = -1$

  De $(\star)$, sigue que

$$
\begin{aligned}
u \in \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{lcl} 3x+2y+z & = & -x \\ 3y+2z & = & -y \\ -z & = & -z \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad z = -2y;\ x = 0 \\
&\iff u = (0,y,-2y);\ y \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(0,1,-2) \\
&\iff \left(\mathbb{R}^3\right)_{-1} = \langle\{(0,1,-2)\}\rangle
\end{aligned}
$$

(3) Luego, no existe una base de vectores propios α tal que T se represente como una matriz diagonal.

Observación 1.2.10.

Al respecto de los ejemplos (1.2.8) y (1.2.9), podemos decir lo siguiente:

(1) En ambos ejemplos el polinomio característico $P_T(\lambda)$ es el mismo, sin embargo en ejemplo (1.2.8) existe la base de vectores propios y en el ejemplo (1.2.9), no existe una tal base.
Luego, el polinomio característico, no discrimina si un operador se representa o no como una matriz diagonal.

(2) Si llamamos:
$m.a.(\lambda)$= las veces que el valor propio λ, aparece repetido en $P_T(\lambda)$ (es decir, la multiplicidad algebraica de λ) y

$m.g.(\lambda)$= la dimensión del subespacio propio $\left(\mathbb{R}^3\right)_\lambda$
entonces

(i) En (1.2.8), tenemos el siguiente comportamiento:

$m.a.(3) = 2$	$m.g.(3) = 2$	$m.a.(3) = m.g.(3)$
$m.a.(-1) = 1$	$m.g.(-1) = 1$	$m.a.(-1) = m.g.(-1)$

Equivalentemente,

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) \quad \wedge \qquad \mathbb{R}^3 = \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_3}_{dim\ 2} \oplus \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_{-1}}_{dim\ 1}$$

(ii) En (1.2.9), tenemos el siguiente comportamiento:

$m.a.(3) = 2$	$m.g.(3) = 1$	$m.a.(3) > m.g.(3)$
$m.a.(-1) = 1$	$m.g.(-1) = 1$	$m.a.(-1) = m.g.(-1)$

Equivalentemente

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) \quad \wedge \qquad \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_3}_{dim\ 1} \oplus \underbrace{\left(\mathbb{R}^3\right)_{-1}}_{dim\ 1} \leq \mathbb{R}^3$$

(3) Luego, existe una relación importante entre los conceptos:
- $m.a.(\lambda)$
- $m.g.(\lambda)$
- Existencia de una base de vectores propios de V.

Llega la hora de definir los conceptos claves, para entendernos.

Definición 1.2.11.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$. Diremos que T es un operador diagonalizable si existe una base de vectores propios, α de V

Definición 1.2.12.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y λ, un valor propio de $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces notaremos:

(i) $m.a.(\lambda)$= multiplicidad algebraica de λ

(ii) $m.g.(\lambda) = dim_{\mathbb{K}}\,(V)_\lambda$

Lema 1.2.13.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y λ_0, un valor propio de T entonces

$$m.g.(\lambda_0) \quad \leq \quad m.a.(\lambda_0) \tag{139}$$

La demostración es un poco técnica, pero útil para el desarrollo algorítmico del pensamiento modelístico. Para alivianar la carga abstracta iremos etapa por etapa lentamente.

(1) Supóngamos que $m.a.(\lambda_0) = s$, con $s \geq 1$ y $m.g.(\lambda_0) = r$
(2) Sea $u \in (V)_{\lambda_0}$ entonces $T(u) = \lambda_0 u$. Ahora ojo con esta!!!

$$\begin{aligned} T(T(u)) &= T(\lambda_0 u) \\ &= \lambda_0 T(u) \end{aligned}$$

Luego,

$$u \in (V)_{\lambda_0} \Longrightarrow T(u) \in (V)_{\lambda_0} \tag{140}$$

(3) Lo obtenido en (140), nos permite decir que

$$T\left[(V)_{\lambda_0}\right] \subset (V)_{\lambda_0} \tag{141}$$

La propiedad expresada en (141), tecnicamente se parafrasea diciendo " $(V)_{\lambda_0}$ es un subespacio invariante de T", pero más allá de tecnísismos, esta propiedad se usa para definir nuevas funciones a partir de la función original, como sigue:

$$\begin{array}{ccc} (V)_{\lambda_0} & \stackrel{T_0}{\longmapsto} & (V)_{\lambda_0} \\ u & \longmapsto & T_0(u) = T(u) \end{array}$$

Luego, tenemos para T_0 restricción de T al subespacio $(V)_{\lambda_0}$, las siguientes propiedades:

(i) $T_0 \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}\left[(V)_{\lambda_0}\right]$, es decir T_0 es un operador de $(V)_{\lambda_0}$

(ii) $P_{T_0}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r$ y $\partial(P_{T_0}(\lambda)) \leq \partial(P_T(\lambda))$

Así, $m.g.(\lambda_0) \leq m.a.(\lambda_0)$

Teorema 1.2.14.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que:

(i) $P_T(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$; $(\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j)$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} n_i = n$

entonces T diagonalizable si y sólo si $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ para $i = 1, \dots, n$
En efecto

(1) Sea α_i una base de V_{λ_i}, para $i = 1, 2, \dots s$
(2) Sea $\alpha = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} \alpha_i$

entonces

$$m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i) \iff \alpha \text{ es una base de } V$$

Conclusión 1.2.15.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que $P_T(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$; $(\lambda_i \neq \lambda_j$si $i \neq j)$, es el polinomio característico de T entonces

(1) $P_T(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tal que $\partial(P_T(\lambda)) = n$, es decir, $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m.a.(\lambda_i) = n$

(2) λ_0 es un valor propio de T si $P_T(\lambda_0) = 0$

(3) T diagonalizable si y sólo si $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ para $i = 1, \dots, n$ y en tal caso tenemos lo siguiente:

(i) Existe una base $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cdots \cup \alpha_s$ de V tal que α_i es base de V_{λ_i}, para cada $i = 1, \dots s$ y

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix} \tag{142}$$

(ii) V se descompone en suma directa de subespacios propios:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \cdots \oplus V_{\lambda_s} \tag{143}$$

Es decir,

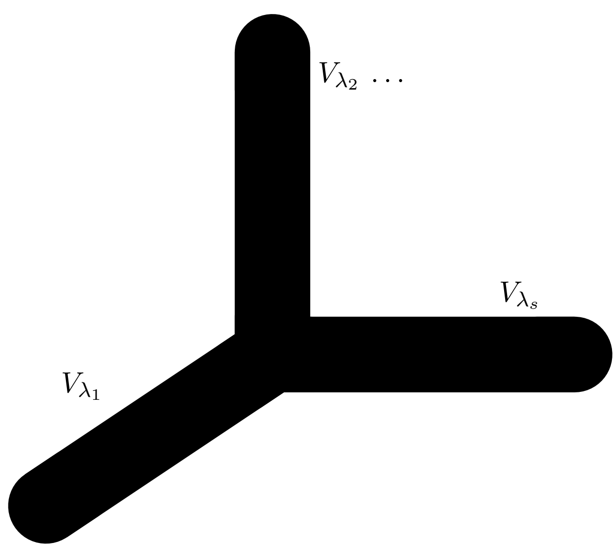

Figura 15

(iii) T se descompone en una suma de operadores del tipo:

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_s \tag{144}$$

donde $T_i(u) = \lambda_i u$, para cada $i = 1, 2, \dots, s$

Observación 1.2.16.

Es evidente, que esta forma de verificar si un operador es o no diagonalizable tiene inconvenientes tales como:

(1) Es impracticable si el número de valores propios es grande (a menos que usemos el computador, Maple, Matlab, Matemática, etc.)
(2) Es posible que en muchos casos, se desee saber sólo, si el operador es diagonalizable o no; en tal caso se necesita una técnica diferente.
(3) Para una teoría precisa y completa sugiero consultar [**9**]

1.3. Ejercicios Propuestos.

Determine valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales y matrices:

(1) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x, y) = (3y, 2x)$

(2) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

(3) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

(4) $T \in \mathbb{R}_2[x]$, tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x + a_2x^2$

(5) $T \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, tal que $T(A) = A^t$

(6) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que:

(a) $(\mathbb{R}^2)_{-2} = \langle\{(3, 1)\}\rangle$ y

(b) $(\mathbb{R}^2)_3 = \langle\{(-2, 1)\}\rangle$

(12) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que:

(a) $(\mathbb{R}^3)_0 = \langle\{(1, 1, 1), (-1, -1, 0)\}\rangle$ y

(b) $(\mathbb{R}^3)_1 = \langle\{(1, 0, 0)\}\rangle$

(13) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $T \circ T = T$. Determine valores y vectores propios de T.

(14) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $T \circ T = 0$. Determine valores y vectores propios de T.

(15) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\det(A) \neq 0$.

- Demuestre que:

$$A \text{ diagonalizable } \Longrightarrow A^{-1} \text{ diagonalizable}$$

- Si A diagonalizable. Determine los subespacios propios de A^{-1}

(16) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que.

$$\mathbb{V}_0 \neq \{0_V\} \Longleftrightarrow T \text{ no inyectiva}$$

2. Un criterio de diagonalización

Como vimos en (1.2.8) (1.2.9) el polinomio característico es

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Sin embargo en un caso T diagonaliza y en el otro no diagonaliza, la razón expuesta es que la $m.a(3) = m.g(3) = 2$ en el primer caso y $m.a(3) = 2 > m.g(3) = 1$ en el segundo caso, pero por las precisiones anteriores resulta demasiado caro en tiempo y espacio esta solución, así que implementaremos otra técnica que no tenga tales deficiencias, pero como siempre nada es gratis así que de acuerdo a la ley de costo beneficio hay que asumir algún costo, que en este caso consiste en generar o mejor generalizar alguna ideas.

Observación 2.0.1.

En esta discusión la estrategia será la siguiente:

(1) Usaremos el espacio de polinomios $\mathbb{K}_n[x]$; es decir:

$$p(x) \in \mathbb{K}_n[x] \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

(2) Para cada polinomio de la forma; $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$, podemos definir:

$$\begin{array}{rcccc} p(x) & : & \mathbb{K} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ & & u & \longmapsto & p(u) \end{array}$$

Donde,

$$p(u) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_iu^i$$

Más aún,

$$u \text{ es una raíz de } p(x) \Longleftrightarrow u \in \mathbb{K} \wedge p(u) = 0 \Longleftrightarrow u \in ker(p(x))$$

(3) Lo anterior tiene sentido porque en $\mathbb{K}$, valen las siguientes propiedades:
- $u \in \mathbb{K} \wedge a \in \mathbb{K} \Longrightarrow a \cdot u \in \mathbb{K}$
- En particular, $u \in \mathbb{K} \Longrightarrow u^s \in \mathbb{K}$ $(\forall s; s \in \mathbb{N})$

Así que " en cualquier conjunto que sus elementos posean estas propiedades, podemos hacer trabajar al anillo de polinomios", $\mathbb{K}_n[x]$

En particular, estas propiedades valen en $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(s)$ $(\forall s; s \in \mathbb{N})$. Así que podemos definir en el espacio de matrices:

$$\begin{array}{rcccc} p(x) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) \\ & & A & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

Donde;

$$p(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \quad \wedge \quad A^0 = I_n \quad (\text{ identidad de orden n})$$

Ejemplo 2.0.2.

Si $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ entonces

(a) En (1.2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Si llamamos $m_T^{(1)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ entonces en (1.2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} m_T^{(1)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Un cálculo analogo para (1.2.9) nos dice que

$$\begin{aligned}
P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(d) Más aún, si llamamos $m_T^{(2)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ entonces en (1.2.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
m_T^{(2)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que tenemos las siguientes conclusiones:

(1) En (1.2.8) y (1.2.9) se verificó que

$$P_T\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) = (0)$$

(2) En (1.2.8)

$$m_T^{(1)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) = (0)$$

(3) En (1.2.9)

$$m_T^{(2)}\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right) \neq (0)$$

Lo anterior nos motiva para hacer la siguiente:

Definición 2.0.3.

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ entonces llamaremos anulador de la matriz A, al conjunto

$$I(A) = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(A) = (0)\}$$

Ejemplo 2.0.4.

$p(x) = (x-3)^2(x+1) \in I(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Algunas propiedades de $I(A)$

(1) Si $p(x) \in I(A)$ y $q(x) \in I(A)$ entonces

$$\begin{aligned} (p(x) - q(x))(A) &= p(A) - q(A) \\ &= (0) \end{aligned}$$

Luego, para cualquier $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ tenemos que

$$p(x) \in I(A) \quad \wedge \quad q(x) \in I(A) \Longrightarrow (p(x) - q(x)) \in I(A)$$

(2) Sea $a \in \mathbb{K}$ y $p(x) \in I(A)$ entonces

$$\begin{aligned} (a \cdot p(x))(A) &= a \cdot p(A) \\ &= a \cdot (0) \\ &= (0) \end{aligned}$$

Luego, para cualquier $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ tenemos que

$$a \in \mathbb{K} \quad \wedge \quad p(x) \in I(A) \Longrightarrow (a \cdot p(x)) \in I(A)$$

(3) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ entonces el polinomio $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \in I(A)$.

En efecto

Para $n = 2$ tenemos

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, así que:

$$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_2 - A) &= \det\left(\begin{pmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
P_A(A) &= A^2-(a_{11}+a_{22})A+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 -(a_{11}+a_{22})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12}+a_{22}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12}+a_{22}a_{12} \\ a_{11}a_{21}+a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22}+a_{22}^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) & 0 \\ 0 & (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En general, podemos hacer lo siguiente:

Etapa 1 Información previa:

Vale el siguiente teorema ver [**4**]

Si

(i) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(ii) $Adj(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2n} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & \Delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{n3} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}^t,$

es la matriz adjunta de la matriz A, entonces

(iii)

$$(\lambda I_n - A)Adj(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A)I_n \tag{145}$$

Etapa 2 Datos:

Como, $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\det((\lambda I_n - A)_{ij})$ entonces es un polinomio de grado $(n-1)$, para cada i y para cada j, así que:

$$Adj(\lambda I_n - A) = \lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\lambda^{n-3}B_{n-3}+\cdots+B_0 \tag{146}$$

Donde cada B_i para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, es una matriz de orden n.

y

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0 \tag{147}$$

Etapa 3 Ejecución:

Aplicando, (146) y (147) en (145) tenemos;

$$\begin{aligned}
(\lambda I_n - A)Adj(\lambda I_n - A) &= (\lambda I_n - A)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i B_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{i+1}B_i - \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i AB_i \\
&= -AB_0 + \lambda(B_0 - AB_1) + \cdots + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \lambda^n I_n
\end{aligned}$$

Aplicando este resultado en (145) e igualando coeficientes tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl}
-AB_0 & = & b_0 I_n \\
B_0 - AB_1 & = & b_1 I_n \\
B_1 - AB_2 & = & b_2 I_n \\
B_2 - AB_3 & = & b_3 I_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots \\
B_{n-3} - AB_{n-2} & = & b_{n-2} I_n \\
B_{n-2} - AB_{n-1} & = & b_{n-1} I_n \\
B_{n-1} & = & I_n
\end{array}$$

Multiplicando por $A, A^2, \ldots, A^{n-2}$, y sumando miembro a miembro tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
-AB_0 & = & b_0 I_n \\
AB_0 - A^2B_1 & = & b_1 A \\
A^2B_1 - A^3B_2 & = & b_2 A^2 \\
A^3B_2 - A^4B_3 & = & b_3 A^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots \\
A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} & = & b_{n-2}A^{n-2} \\
A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} & = & b_{n-1}A^{n-1} \\
A^nB_{n-1} & = & A^n \\
\hline
(0) & = & P_A(A)
\end{array}$$

(4) Una aplicación inmediata de lo anterior es la siguiente:

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces para cualquier base α de $\mathbb{V}$,

$$P_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - [T]_\alpha^\alpha) \in I([T]_\alpha^\alpha) \tag{148}$$

Este resultado se conoce como " Teorema de Cayley ". Así que en particular, $I([T]_\alpha^\alpha) \neq$

$\emptyset$

Definición 2.0.5.

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ entonces diremos que $m_A(\lambda)$ es el polinomio mínimo de A si:

1. $m_A(A) = (0)$, es decir $m_A(\lambda) \in I_A$
2. $m_A(\lambda)$ es mónico, es decir su coeficiente lider es uno.
3. Si $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tal que $p(A) = (0)$ entonces $\partial(m_A(\lambda)) \leq \partial(p(\lambda))$

Ejemplo 2.0.6.

En (1.2.8) $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ y el polinomio minimal es:

$$m_T(\lambda) \quad = \quad (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

En (1.2.9) $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ y el polinomio minimal es:

$$m_T(\lambda) \quad = \quad (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Como también sabemos en (1.2.8) T es diagonalizable y en (1.2.9) T no es diagonalizable, luego la diferencia es el polinomio minimal, respecto de este tenemos los siguientes resultados:

Lema 2.0.7.

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ entonces vale la equivalencia

$$P_T(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow m_T(\lambda_0) = 0 \tag{149}$$

Es decir, el polinomio característico y minimal tienen las mismas raíces, para una demostración ver [**14**]

Teorema 2.0.8.

Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ tal que $P_T(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ para $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ entonces

$$T \text{ diagonalizable } \Longleftrightarrow m_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i) \tag{150}$$

en efecto

Sea $A = [T]_\alpha^\alpha$, donde α es una base cualquiera de $\mathbb{V}$ entonces

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalizable } \quad &\Longleftrightarrow \quad (\exists \beta; \beta \text{ una base de vectores propios de } \mathbb{V}) \\ &\Longleftrightarrow \quad A = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\beta^\beta \, [I]_\alpha^\beta \\ &\Longleftrightarrow \quad A = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
[T]_{\beta}^{\beta} &= diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow &\ m_T(A) = m_T([I]_{\beta}^{\alpha}\,[T]_{\beta}^{\beta}\left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}) \\
\Longrightarrow &\ m_T(A) = [I]_{\beta}^{\alpha}\, m_T([T]_{\beta}^{\beta})\left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Pero, $m_T([T]_{\beta}^{\beta}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$

2.1. Ejercicios Resueltos.

(1) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x, y, z) = (-x + z, 2x + 3y + 4z, -x - 3z)$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{c(3)}^{c(3)}$

$$A = [T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 3)[(\lambda + 1)(\lambda + 3) + 1] \\
&= (\lambda - 3)[\lambda^2 + 4\lambda + 4] \\
&= (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2
\end{aligned}$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P = \{-2, 3\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

$$\begin{aligned}
(A - 3I_3)(A + 2I_3) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Así que T no es diagonalizable.

(2) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x + a_1x^2$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{p(2)}^{p(2)}$, donde $p(2) = \{1, x, x^2\}$

$$A = [T]_{p(2)}^{p(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda\lambda^2 - 1 \\ &= \lambda^3 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{aligned}$$

Luego, el valor propio real es:

$$V.P = \{1\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

Como $m.a(1) = 1$ entonces $m.g(1) = 1$, así que T no es diagonalizable.

(3) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A - A^t$ entonces

Etapa 1. Construyamos el polinomio característico:

(i) Determinemos $[T]_{m(2)}^{m(2)}$, donde

$$m(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = [T]_{m(2)}^{m(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Determinemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P = \{0, 2\}$$

Etapa 2. Verifiquemos si T es diagonalizable:

$$\begin{aligned} A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{\lambda} &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \wedge T(A) = \lambda A \\ &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \wedge A - A^t = \lambda A \qquad (*) \end{aligned}$$

Así que de (*) sigueue que:

$$\begin{aligned} A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0 &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \wedge A - A^t = (0) \\ &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \wedge A = A^t \\ &\Longrightarrow (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l} m.a(0) = 3 \quad \wedge \quad m.g(0) = 3 \\ m.a(2) = 1 \quad \wedge \quad m.g(2) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow T \text{ diagonalizable}$$

(4) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

- $\det(A) = 4$, luego A es invertible
- Calculemos su polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-3) & -1 & 1 \\ -2 & (\lambda-2) & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1-\lambda & 0 \\ -2 & (\lambda-2) & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda-1)\det\left(\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}\right) - (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda(\lambda-2)+2) + (\lambda-1)(-2\lambda+2) \\ &= (\lambda-1)[\lambda^2 - 2\lambda + 2 - 2\lambda + 2] \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

- Estudiemos si es diagonalizable; es decir, veamos si el polinomio minimal es

$$m_T(\lambda) \stackrel{?}{=} (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\begin{aligned}
(A-I_3)(A-2I_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\neq (0)
\end{aligned}$$

Luego A, no es diagonalizable.

- Podemos usar el polinomio característico para, calcular A^{-1}, como sigue:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 &\Longrightarrow A^3 - 5A^2 + 8A - 4 = 0 \\
&\Longrightarrow A(A^2 - 5A + 8I_3) = 4I_3 \\
&\Longrightarrow A\left(\frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I_3\right) = I_3 \\
&\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I_3
\end{aligned}$$

(5) Sea $\mathbb{V}$, un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que:

(i) $\mathbb{V}_{\lambda_1} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_r\}\rangle \quad \wedge \quad \lambda_1 \in \mathbb{K}$

(ii) $\mathbb{V}_{\lambda_2} = \langle\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_s\}\rangle \quad \wedge \quad \lambda_2 \in \mathbb{K}$

(iii) $\mathbb{V}_{\lambda_3} = \langle\{v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n\}\rangle \quad \wedge \quad \lambda_3 \in \mathbb{K}$

(a) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$

Etapa 1. Lo que debo hacer o me están pidiendo:

Debemos determinar $T(u)$, $(\forall u; u \in \mathbb{V})$

Etapa 2. Datos:

- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_1} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_1 v_i \quad (\forall i; 1 \leq i \leq r)$
- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_2} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_2 v_i \quad (\forall i; r+1 \leq i \leq s)$
- $v_i \in \mathbb{V}_{\lambda_3} \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_3 v_i \quad (\forall i; s+1 \leq i \leq n)$
- Como α es una base de $\mathbb{V}$, entonces para cada $u \in \mathbb{V}$ existen únicos escalares en $\mathbb{K}$, tales que:
$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (*)$$

Etapa 3. Ejecución.

De $(*)$, sigue que:

$$\begin{aligned}
T(u) &= T\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{s} a_i v_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i T(v_i) + \sum_{i=r+1}^{s} a_i T(v_i) + \sum_{i=s+1}^{n} a_i T(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_1 v_i + \sum_{i=r+1}^{s} a_i \lambda_2 v_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i \lambda_3 v_i \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \lambda_2 \sum_{i=r+1}^{s} a_i v_i + \lambda_3 \sum_{i=s+1}^{n} a_i v_i
\end{aligned}$$

(b) ¿ T es diagonalizable ?

Como α es una base de vectores propios de T entonces T, es diagonalizable y

(151)
$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & & & \\
& & & \lambda_2 & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & \lambda_2 & & & \\
& & & & & & \lambda_3 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & \lambda_3
\end{bmatrix}$$

(c) ¿ T es un isomorfismo ?

Sabemos que T es un isomorfismo si y sólo si $\det(T) \neq 0$, así que en este caso;

$$\begin{aligned}
T \text{ isomorfismo } &\iff \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0 \\
&\iff \lambda_i \neq 0 \quad (\forall i; i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

(d) ¿ T^{-1} es invertible ?

Observamos que si $\lambda_i \neq 0 \quad (\forall i; i = 1, 2, 3)$ entonces T^{-1} existe y vale la fórmula fundamental

$$T(u) = v \iff u = T^{-1}(v)$$

Así que en particular, tenemos

Para $1 \leq i \leq r$

$$T(v_i) = \lambda_1 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_1 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_1} v_i$$

Para $r+1 \leq i \leq s$

$$T(v_i) = \lambda_2 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_2 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_2} v_i$$

Para $s+1 \leq i \leq n$

$$T(v_i) = \lambda_3 v_i \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \lambda_3 T^{-1}(v_i) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_3} v_i$$

2.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Verifique ¿cuál de los operadores propuestos en (1.3) es diagonalizable?

(2) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & : \text{ si } i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- Determine valores propios y subespacios propios de A.
- Determine el polinomio minimal de A.

(3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{a \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{a \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(5) Considere la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} m & : \text{ si } i = j \\ a & : \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Donde, $m \neq 0$ y $a \neq 0$. Demuestre que

- $P_A(\lambda) = (\lambda - (m-a))^{n-1}(\lambda - (m+(n-1)a))$
- $\det(A) = (m-a)^{n-1} \cdot (m+(n-1)a)$

(6) Determine A^n. Si (a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

3. Aplicaciones

3.1. Modelo de Crecimiento Poblacional.

(1) **Planteamiento del Problema**

Análisis de un modelo que describa el crecimiento de una población usando valores y vectores propios.

(2) **Modelo 1**
Hipótesis de Trabajo

Suponemos que una cierta especie crece a una tasa de crecimiento constante en el tiempo (el tiempo, puede ser una hora, un día, una semana, un mes, un año, etc.)

Un tal caso, es dado si por ejemplo:

- Cada generación es distinta y,
- Cada organismo produce "r" críos y después muere.

Así si p_t, representa la población después de t, periodos entonces la ecuación que rige el crecimiento de dicha población es:

$$p_t = rp_{t-1} \quad \text{equivalentemente} \quad p_t = r^t p_0 \tag{152}$$

donde, p_0 representa la población inicial.

(3) **Conclusión al Modelo 1**

(i) $r > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = \nexists$.

Es decir, la población aumenta geométricamente (sin cota superior) en el tiempo.

(ii) $r = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = p_0$.

Es decir, la población mantiene crecimiento constante independiente del tiempo.

(iii) $r < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} p_t = \lim\limits_{t\to\infty} r^t p_0 = 0$.

Es decir, la población disminuye geométricamente a cero en el tiempo y por tanto se extinguirá.

(4) **Algunos problemas del Modelo 1**

(i) El crecimiento de una población en general no es a tasa constante.

(ii) En general el número de crías que puede generar una hembra depende de su edad

(5) **Modelo 2**

Hipótesis de Trabajo

Se estudiará un modelo de crecimiento poblacional, para una especie de pájaros, que satisface las siguientes condiciones:

(1) Número de hembras = Número de machos

(2.1) $p(j, n-1)$ = Población juvenil de hembras en el año $(n-1)$

(2.2) $p(a, n-1)$ = Población adulta de hembras en el año $(n-1)$

(3) α=probabilidad con que los pájaros jóvenes que sobreviven y llegan a adulto en el año n.

(4) k= promedio de pájaros hembras jóvenes, generado por las hembras adultas que sobreviven.

(5) β= probabilidad con que los pájaros adultos sobreviven de una primavera para otra.

(6) Toda la información anterior puede ser computada vía las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcccc} p(j,n) & = & & & kp(\alpha, n-1) \\ p(a,n) & = & \alpha p(j,n-1) & + & \beta p(a,n-1) \end{array} \tag{153}$$

Equivalentemente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p(j,n) \\ p(j,n-1) \end{pmatrix}}_{p(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} p(j,n-1) \\ p(a,n-1) \end{pmatrix}}_{p(n-1)} \tag{154}$$

Análisis matemático del modelo

- De (154), sigue que

$$\begin{aligned} p(1) &= AP(0) \\ p(2) &= AP(1) = A^2 p(0) \\ p(3) &= AP(2) = A^3 p(0) \\ &\vdots \\ p(n) &= AP(n-1) = A^n p(0) \end{aligned}$$

- Determinemos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -k \\ -\alpha & (\lambda - \beta) \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - \beta) - k\alpha \\ &= \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha \end{aligned}$$

Luego,

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha$$

- Ahora, para calcular los valores propios hacemos $P_A(\lambda) = 0$

Es decir;

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 &\iff \lambda^2 - \lambda\beta - k\alpha = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4k\alpha}}{2} \end{aligned}$$

Luego, los valores propios son:

$$V.P = \left\{ \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4k\alpha}}{2}, \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4k\alpha}}{2} \right\}$$

Además λ_1 y λ_2 satisfacen las propiedades:

(i) $\alpha \in [0, 1]$ y $\beta \in [0, 1]$ y $k > 0$ entonces $\beta^2 + 4k\alpha > 0$

(ii) Si $\lambda_1 = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4k\alpha}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4k\alpha}}{2}$ entonces $\lambda_1 > \lambda_2$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

- Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$, base de vectores propios de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, correspondiente a los valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente entonces valen las siguientes propiedades:

  (i) Como $p(0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y α es base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces existen únicos escalares a_1, a_2 tales que
  $$p(0) = \begin{pmatrix} p(j, 0) \\ p(a, 0) \end{pmatrix} = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

  (ii) Sustituyendo en la ecuación central $p(n) = A^n p(0)$ tenemos que
  $$\begin{aligned} p(n) &= A^n(a_1 v_1 + a_2 v_2) \\ &= a_1 A^n v_1 + a_2 A^n v_2 \\ &= a_1 \lambda_1^n v_1 + a_2 \lambda_2^n v_2 \\ &= \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^n a_2 v_2 \right) \end{aligned}$$

(6) **Conclusión al Modelo 2**

- $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^n a_2 v_2 \right) \approx \lambda_1^n a_1 v_1$

(7) **Algunos problemas del Modelo 2**

(i) La tasa de nacimiento y muerte cambia con frecuencia de un año para otro y depende del clima, este modelo supone clima constante.

(ii) Muchas especies poseen una tasa de nacimiento y muerte que varia con el tamaño de la población, en particular una población no puede crecer indefinidamente a una tasa constante, caso contrario dominaría la tierra.

Ejemplo 3.1.1. *Apliquemos el modelo para el siguiente caso:*

(1) *Datos particulares:*
- $k = 2$
- $\alpha = 0.3$
- $\beta = 0.5$
- $p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

(2) *Determinamos los valores y vectores propios de* $A = \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$

(i) *Sus valores propios son:*

$$V.P = \{-05639, 1.0639\} = \{\lambda_2, \lambda_1\}$$

(ii) *Sus vectores propios son:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{pmatrix} -0.9625 \\ 0.2714 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8829 \\ -0.4697 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0.9625 \\ -0.2714 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8829 \\ 0.4697 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{v_2, v_1\} \end{aligned}$$

(3) *Aplicando las conclusiones del modelo 2, tenemos que:*

$$\begin{aligned} p(n) &\approx \lambda_1^n a_1 v_1 \\ &\approx 1.0639^n a_1 v_1 \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 1$ *entonces la población crecerá.*

CAPITULO 4

Espacios Vectoriales con Producto Interno

1. Norma

Motivación 1.0.2.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces podemos asociar a v una flecha como en la Figura.

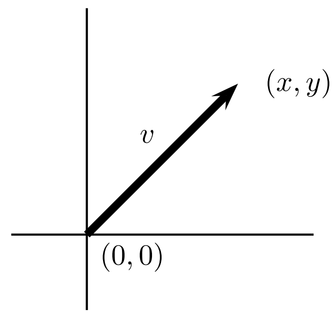

Figura 16

Si notamos:

$$\mathbb{F}^2 = \{\text{Conjunto de flechas como en figura 1}\}$$

entonces

(1) Existe una biyección natural entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{F}^2$, definida como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{F}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) = v \end{aligned}$$

Donde v es una flecha que parte en $(0, 0)$ y termina en (x, y).

(2) Podemos Equipar a $\mathbb{F}^2$ con estructura de $\mathbb{R}$ - espacio vectorial haciendo lo siguiente.

Si $\varphi(x_1, y_1) = v_1$ y $\varphi(x_2, y_2) = v_2$ entonces

(a) $v_1 + v_2 = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(b) $\lambda v_1 = \lambda\varphi(x_1, y_1) = \varphi(\lambda x_1, \lambda y_1)$

Así $\mathbb{F}^2$ se transforma en un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial " Isomorfo " a $\mathbb{R}^2$.

(3) Es natural entonces preguntar en $\mathbb{F}^2$ por el largo de una flecha v, que denotaremos por $l(v)$, para ello estudiemos la siguiente figura.

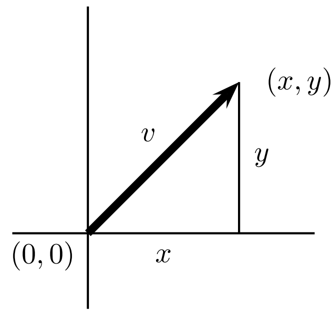

Figura 17

De acuerdo al teorema de Pitágoras $l(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y luego tenemos inducida una función largo en $\mathbb{F}^2$ definida por:

$$l : \mathbb{F}^2 \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

tal que

$$l(v) = \sqrt{x^2 + y^2} \Longleftrightarrow v = \varphi(x, y)$$

(4) Como $\mathbb{F}^2 \cong \mathbb{R}^2$ entonces tambien tenemos una función " largo " en $\mathbb{R}^2$, que llamaremos genericammente " Norma " definida por:

$$\begin{aligned} \| \, \| \quad : \quad \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Así,

$$\|(x, y)\| = l(\varphi(x, y)) = l(v)$$

(5) Sea $c(2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $s(2) = \{e_1, e_2\}$, su correspondiente base canónica en $\mathbb{F}^2$.

e.e.

$$\varphi(1, 0) = e_1 \quad \wedge \quad \varphi(0, 1) = e_2$$

entonces el efecto es el siguiente:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(x, y) = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{F}^2$$

(a) ¿ Qué pasa con el largo en $\mathbb{F}^2$ y con la norma en $\mathbb{R}^2$, si consideramos una base arbitraria $\alpha = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in \mathbb{R}^2$ y su correspondiente $\alpha' = \{u_1, u_2\} \in \mathbb{F}^2$?

Estudiemos la situación más o menos genericamente en la siguiente figura.

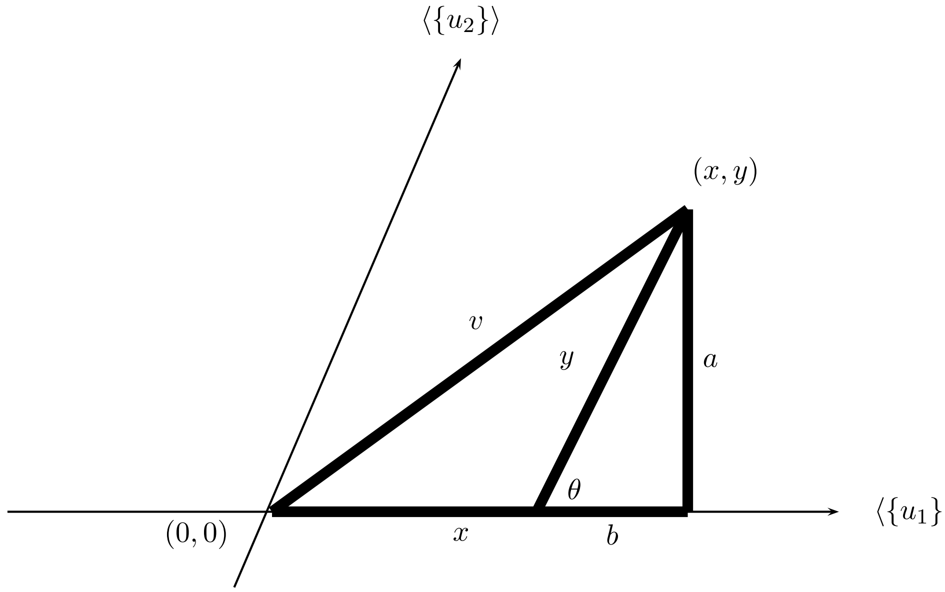

Figura 18

entonces

(i) $\sin\theta = \dfrac{a}{y} \Longrightarrow a = y\sin\theta$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{b}{y} \Longrightarrow b = y\cos\theta$

(iii) Del teorema de Pitágoras sigue que;

$$\begin{aligned} l(v) &= \sqrt{(x+b)^2 + a^2} \\ &= \sqrt{(x + y\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2} \end{aligned}$$

Luego, en $\mathbb{R}^2$ tenemos que:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}$$

En particular, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y las normas así definidas dependen de la base escogida.

(b) Finalmente, es claro que l ó $\|\,\|$ satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\|(x, y)\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|(x, y)\| = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$

(ii) $\|\lambda(x, y)\| = |\lambda|\|(x, y)\|$

(iii) $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| \leq \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|$

(6) Consideremos la siguiente situación geométrica en $\mathbb{F}^2$.

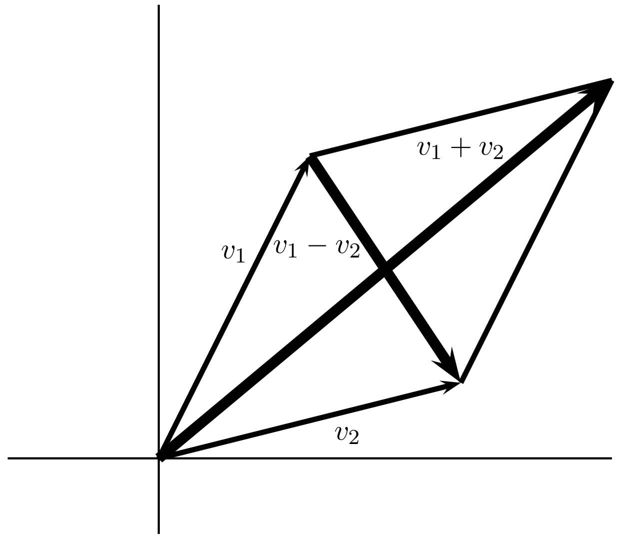

Figura 19

entonces vale la siguiente identidad, conocida como " Ley del paralelogramo "

$$[l(v_1 + v_2)]^2 + [l(v_1 - v_2)]^2 \quad = \quad 2\left([l(v_1)]^2 + [l(v_2)]^2\right) \tag{155}$$

En $\mathbb{R}^2$ sería de la forma

$$\|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|^2 + \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^2 \quad = \quad 2\left(\|(x_1, y_1)\|^2 + \|(x_2, y_2)\|^2\right)$$

(7) En $\mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\frac{1}{4}\left(\|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|^2 + \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^2\right) \quad = \quad x_1x_2 + y_1y_2$$

Así, cuando la norma satisface la " Ley del paralelogramo " induce una especie de producto entre vectores de la forma

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

En particular,

$$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = x_1^2 + y_1^2 = (\|(x_1, y_1)\|)^2$$

(8) Finalmente, consideremos la siguiente situación física.

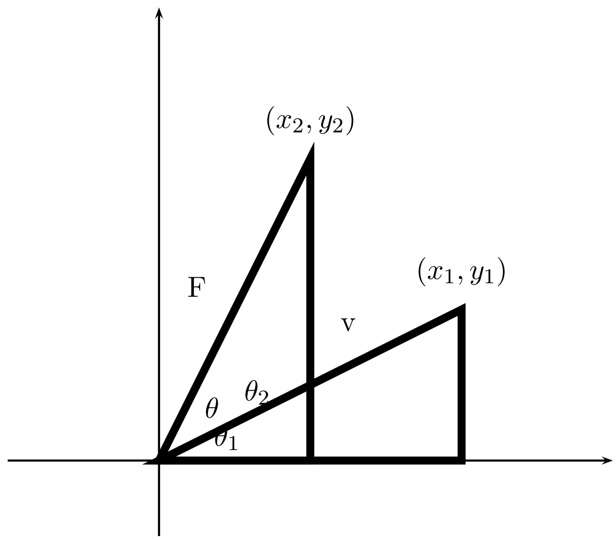

Figura 20

Es decir, consideramos un objeto que se mueve en línea recta desde el origen del sistema hasta (x_1, y_1), con un ángulo θ_1; por acción de una fuerza constante F describiendo un ángulo θ_2.

Sabemos que en este caso el Trabajo realizado es regido por la ecuación

$$T = l(F)l(v)\cos\theta \tag{156}$$

En la Figura tenemos que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ entonces

$$\cos\theta \quad = \quad \cos\theta_2 \cos\theta_1 - \sin\theta_2 \sin\theta_1$$

Esto es,

$$\cos\theta = \frac{x_2}{l(F)}\frac{x_1}{l(v)} + \frac{y_2}{l(F)}\frac{y_1}{l(v)} \tag{157}$$

Sustituyendo (157) en (156), tenemos que

$$T = x_1x_2 + y_1y_2!!!$$

Además si $v = F$ entonces $T = x_1^2 + y_1^2$

Definición 1.0.3.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial, ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $f : V \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, una función; f será llamada una " Norma " sobre V si y sólo si

(1) $f(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$
(2) $f(\lambda v) = |\lambda| f(v) \quad \lambda \in \mathbb{K}$
(3) $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$ (Desigualdad triangular)

Ejemplo 1.0.4.

(1) $\|\| : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad n \geq 1$ tal que

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(2) Sea $V = C([0,1]) = \{g : [0,1] \longmapsto \mathbb{R} \mid \text{ g función continua en } [0,1]\}$
Define la norma:

$$\|g\| \quad = \quad \sup\{|g(t)| \,/\, t \in [0,1]\}$$

(3) Sea $V = C([a,b] = \{f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \,/\, \text{ f función continua en } [a,b]\}$
entonces definimos

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Definición 1.0.5.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. V se llama un espacio normado si existe una norma definida en V. En tal caso lo notaremos como $(V, \|\|, \mathbb{K})$

Más adelante tendremos oportunidad de profundizar más este concepto.

2. Preliminares sobre Producto Interno

Motivación 2.0.6.

Consideremos un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V entonces automáticamente pensamos en el meollo del Algebra Lineal, es decir que, para cada $v \in V$ existen únicos escalares que representan al vector v, en forma teórica o práctica respecto de esa base.
En símbolos

$$\begin{array}{rcl} v & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\ & \Updownarrow & \\ [v]_\alpha & = & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Más aún,

$$\begin{array}{rcccc} [\ ]_\alpha & : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \\ & & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array}$$

Es un Isomorfismo de espacios vectoriales y además podemos observar los siguientes puntos centrales:

(1) Dada la base y el vector v, la determinación de los escalares $a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ en el cuerpo $\mathbb{K}$ se realiza a través de un sistema de ecuaciones.
(2) Lamentablemente la resolución del sistema de ecuaciones implica que la búsqueda es secuencial, esto es, para conocer a_i, por ejemplo debo conocer a_{i-1}.

¿ Y qué tiene de malo una búsqueda secuencial ?. La respuesta es depende de ¿ quién ? y ¿ qué se ejecuta ?
Por ejemplo
(i) De grano en grano un zorzal se comió una viña, en este caso para el zorzal no hay problema, probablemente se encuentre " feliz ".
(ii) Suponga que Ud. desea pedir un préstamo en el Banco U, en esta empresa Ud. es lo siguiente para su Ejecutivo de Cuentas:

$$Ud \quad = \quad \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix}$$

¿ Cuál cree Ud. qué es la casilla favorita del ejecutivo ?, acertó en pleno, imagina que el tuviese que leer todas las casillas (posiciones) anteriores a los pocos miles para pensar en su préstamo, si así fuese, lo más probable es que se quedará sin comprar su PC favorito.
(iii) ¿ Cómo cree que el ejecutivo accedió a la casilla correcta. ?
Probablemente el procedió de la siguiente forma:

- Generó una matriz adecuada, con ceros en la posición que no le interesa, es decir construyó

$$Ejecutivo \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Procedió a multiplicar por cero, como antaño, para eliminar lo indeseable, es decir

$$
\begin{aligned}
\langle Ejecutivo, Ud.\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \\
&= \text{pocos miles}
\end{aligned}
$$

- No califica

(3) No obstante el resultado de la gestión, hemos obtenido la siguiente moraleja o enseñanza, la cual modelaremos tecnicamente como sigue.

(a) Como $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces dados los vectores u y v de V existen únicos escalares tales que:

$$
v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \iff [v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{158}
$$

y

$$
u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \iff [u]_\alpha = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{159}
$$

entonces definimos, siguiendo al ejecutivo

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_\alpha &= \left\langle \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}^t \overline{\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix}} \\
&= \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \vdots\\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n b_i\bar{a}_i
\end{aligned}
$$

(b) Ejemplo

(i) $V = \mathbb{R}^2$ y $\alpha = c(2) = \{(1,0),(0,1)\}$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{160}$$

(ii) $V = \mathbb{R}^2$ y $\alpha = \{(1,1),(1,-1)\}$

- $(x, y) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \Longleftrightarrow$
$$a_1 = \frac{x+y}{2} \wedge a_2 = \frac{x-y}{2}$$
- Luego,
$$[(x,y)]_\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} \end{bmatrix}$$
- Así que,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \frac{1}{2}(x_1x_2 + y_1y_2) \tag{161}$$

(c) Antes de concluir esta motivación, observamos que a causa de las propiedades del producto de matrices, el producto debe tener las siguientes propiedades:

(i) $\langle u, u\rangle \geq 0$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= \langle [u]_\alpha, [u]_\alpha\rangle \\
&= [u]_\alpha^t \cdot \bar{[u]}_\alpha \\
&= \sum_{i=1}^n u_i\bar{u}_i \\
&= \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(ii) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\langle u+v, w\rangle &= \langle [u+v]_\alpha, [w]_\alpha\rangle \\
&= [u+v]_\alpha^t \cdot \bar{[w]}_\alpha \\
&= \sum_{i=1}^n (u_i+v_i)\bar{w}_i \\
&= \sum_{i=1}^n (u_i\bar{w}_i + v_i\bar{w}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n u_i\bar{w}_i + \sum_{i=1}^n v_i\bar{w}_i \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}
$$

(iii) Analogamente

$\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(iv) $\langle \lambda \cdot u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$

En efecto

$$\begin{aligned}
\langle \lambda \cdot u, w\rangle &= [\lambda \cdot u]_\alpha^t [\bar{w}]_\alpha \\
&= \lambda [u]_\alpha^t \cdot [\bar{w}]_\alpha \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot u_i \bar{w}_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{w}_i \\
&= \lambda \langle u, w\rangle
\end{aligned}$$

(v) Análogamente $\langle u, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, w\rangle$

(vi) $\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\langle u, w\rangle &= [u]_\alpha^t, [\bar{w}]_\alpha \\
&= [u]_\alpha^t \cdot [\bar{w}]_\alpha \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{w}_i \\
&= \overline{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{u}_i} \\
&= \overline{\langle w, u\rangle}
\end{aligned}$$

Todo lo anterior nos obliga a hacer la siguiente

Definición 2.0.7.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. V se dice un espacio con " Producto Interno " ó un espacio " Prehilbertiano " si y sólo si existe una función.

$$\begin{aligned}
\langle , \rangle \quad : \quad & V \times V \longmapsto \mathbb{K} \\
& (u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

tal que

(1) $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad (\forall v, v \in V) \wedge \langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(3) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(4) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

(5) $\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$

(6) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Ejemplo 2.0.8.

(1) *En* $\mathbb{K}^n$ *definimos:*

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j \tag{162}$$

El producto definido en (162) se llama producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$*, debe observarse que si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *entonces (162) se transforma en:*

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{163}$$

(2) *En* $C([a, b])$ *define*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

2.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial Prehilbertiano.
Demuestre que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \tag{164}$$

La desigualdad definida en (164), se conoce con el nombre de "Desigualdad de Cauchy - Schwarz"

(2) Demuestre que

$$V \text{ Prehilbertiano} \Longrightarrow V \text{ Normado}$$

(Sugerencia: Muestre usando (164) que

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \tag{165}$$

Es una norma)
La norma definida en (165) se llama norma proveniente del producto interno ó norma inducida por el producto interno.

(3) Si V es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial Prehilbertiano entonces demuestre que la norma satisface la Ley del paralelógramo.
e.e. vale la identidad

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{166}$$

(4) Si V es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial Prehilbertiano entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right] \tag{167}$$

La identidad (167) se conoce como Identidad de Polarización.

(5) Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial normado. Demuestre que si la norma satisface (166) entonces V es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial Prehilbertiano.
e.e. la norma satisface (165)

(6) V es un $\mathbb{K}$ - espacio $\mathbb{W}$
vectorial Prehilbertiano

(7) Determine una base ortogonal, respecto del producto interno usual,para el subespacio.

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge t + z = 0\}$$

(8) Sea $(\mathbb{V},\ \langle,\rangle,\ \mathbb{K})$, un espacio vectorial y $\mathbb{W}$ un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{V}$, $(\mathbb{W} \leq \mathbb{V})$. Considere el conjunto

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{u \in \mathbb{V} \mid \langle u, w\rangle = 0\ \forall w; w \in \mathbb{W}\}$$

- Demuestre que $\mathbb{W}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$
- Demuestre que $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

entonces define para para $u \in V$ y $v \in V$.

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Demuestre que

(a) $d(u, v) \geq 0 \quad \wedge \quad d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v \quad (\forall (u, v); (u, v) \in V^2)$

(b) $d(u, v) = d(v, u) \quad (\forall (u, v); (u, v) \in V^2)$

(c) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad (\forall (u, v, w); (u, v, w) \in V^3)$

$d(u, v)$ se la llama la distancia inducida por $\|\|$ entonces (V, d), se llama un espacio métrico.
Así,

$$(V, \langle,\rangle) \Longrightarrow (V, \|\|) \Longrightarrow (V, d)$$

3. Bases ortogonales

Motivación 3.0.1.

Aunque nuestro astuto ejecutivo, encontró la forma de determinar la coordenada que a él le interesaba, no obstante hay todavía un pequeño problema.

Para determinar una coordenada hay que ser capaz de tener, la o las coordenadas del vector !!!

Así que manos a la obra.
Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, una $\mathbb{K}$ - base de V.

e.e.
Para cada $v \in V$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \tag{168}$$

Equivalentemente

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \tag{169}$$

Así, lo expresado en (168) ó (169) es simplemente el " Objetivo fundamental " del algebra Lineal, e.e. " Para conocer completamente un vector de V basta conocer sus " Coordenadas respecto del Sistema de Información α. "

Entonces parece natural que debamos analizar el efecto del producto interno (si es que lo hay) en el proceso de búsqueda de coordenadas. Es inmediato de observar que la ventaja del producto es que, permite implementar la preconcebida máxima " multiplicate por cero " la cual sin duda para bien ó para mal reduce en cualquier caso el problema.
Estudiemos el problema en $\mathbb{R}^2$ ó en $\mathbb{F}^2$, recuerde que son isomorfos.
Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una $\mathbb{K}$ - base de $\mathbb{F}^2$ entonces para $v \in \mathbb{F}^2$ existen únicos a_1, a_2 en $\mathbb{K}$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \tag{170}$$

Supongamos además que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces podemos multiplicar (170) por v_1 por ejemplo para obtener;

$$\begin{aligned} \langle v, v_1\rangle &= \langle a_1 v_1 + a_2 v_2, v_1\rangle \\ &= a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle \\ &= a_1\langle v_1, v_1\rangle \end{aligned}$$

Luego,

$$a_1 = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$

análogamente

$$a_2 = \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$$

Conclusión 3.0.2.

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Longrightarrow v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \tag{171}$$

Finalmente ¿ Qué significa geométricamente el hecho $\langle v_1, v_2\rangle = 0$?
Consideremos la figura 6

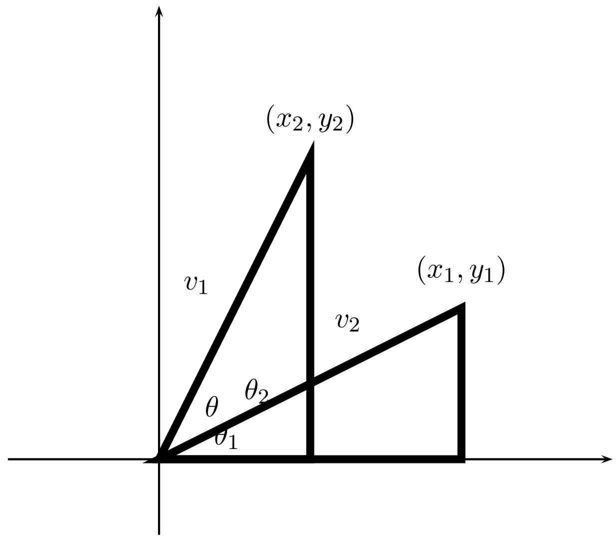

Figura 21

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle = 0 &\iff x_1x_2 + y_1y_2 = 0\\
&\iff l(v_1)\cos\theta_1 l(v_2)\cos\theta_2 + l(v_1)\sin\theta_1 l(v_2)\sin\theta_2 = 0\\
&\iff l(v_1)l(v_2)\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0\\
&\iff l(v_1)l(v_2)\cos\theta = 0\\
&\iff \theta = \frac{\pi}{2}\\
&\iff v_1 \perp v_2
\end{aligned}$$

Definición 3.0.3.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio Prehilbertiano y considera $u \in V$ y $v \in V$. u se dirá ortogonal a v si y sólo si $\langle u, v\rangle = 0$.

Notación: $u \perp v \iff \langle u, v\rangle = 0$

Lema 3.0.4.

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio Prehilbertiano y W un subespacio de V entonces

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\,(\forall w; w \in W)\} \tag{172}$$

es un subespacio de V.

entonces

(1) P.d.q.

$$0_v \in W^{\perp}$$

En efecto

$\langle 0, w\rangle = \langle 0+0, w\rangle = \langle 0, w\rangle + \langle 0, w\rangle \ (\forall w; w \in W)$

Luego,

$$\langle 0, w\rangle = \langle 0, w\rangle + \langle 0, w\rangle \Longrightarrow \langle 0, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)$$

Así, $0_v \in W^\perp$

(2) P.d.q.

$$u \in W^\perp \wedge v \in W^\perp \Longrightarrow u + v \in W^\perp$$

En efecto

Sean $u \in W^\perp$ y $v \in W^\perp$ entonces

$$u \in W^\perp \iff \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W) \tag{173}$$
$$v \in W^\perp \iff \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W) \tag{174}$$

así que

$$\begin{aligned} \langle u+v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad (\forall w; w \in W) \\ &= 0 + 0 \qquad \text{aplicar (173) y(174)} \end{aligned}$$

Luego, $u + v \in W^\perp$

(3) P.d.q.

$$\lambda \in \mathbb{K} \wedge v \in W^\perp \Longrightarrow \lambda v \in W^\perp$$

En efecto

$$\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \quad (\forall w; w \in W^\perp \tag{175}$$
$$= \lambda 0 \qquad \text{aplicar (174)} \tag{176}$$
$$= 0 \tag{177}$$

Luego, $\lambda v \in W^\perp$

Así, $W^\perp$ es un subespacio de V.

Definición 3.0.5.

$W^\perp$ será llamado " Complemento Ortogonal " de W en $(V, \langle,\rangle)$.

Ejemplo 3.0.6.

Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ y consideremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$ entonces

(1)

$$\begin{aligned}
w \in W &\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x - y + z = 0 \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -x - y \\
&\iff w = (x, y, -x - y) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\
&\iff w = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\
&\iff w \in \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

(178) $$W = \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle$$

(2) *De (178), sigue que*

$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \langle v, (0, 1, -1)\rangle = 0\}$*!!! ¿ Por qué ?*

Así que,

$$\begin{aligned}
v \in W^\perp &\iff v \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W) \\
&\iff v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [\langle(x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \\
&\qquad \langle(x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0] \\
&\iff v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [x - z = 0 \wedge y - z = 0] \\
&\iff v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = y = z \\
&\iff v = (x, x, x) \wedge x \in \mathbb{R} \\
&\iff v = x(1, 1, 1) \wedge x \in \mathbb{R} \\
&\iff v \in \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle
\end{aligned}$$

Así,

$$W^\perp = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$$

Lema 3.0.7.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio Prehilbertiano y considera $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset (V - \{0_V\})$ entonces

$$v_i \perp v_j \quad i \neq j \Longrightarrow \alpha \text{ es un conjunto linealmente independiente en } V$$

Prueba
P.d.q.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \Longrightarrow a_j = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

En efecto

Supongamos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \quad a_j \in \mathbb{K}; (1 \leq j \leq n)$ *entonces como ahora podemos multiplicar,* *lo hacemos e.e.*

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\
&= a_k \langle v_k, v_k \rangle \qquad (\textit{recordar que } v_i \perp v_j \quad i \neq j)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$v_k \neq 0 \ \text{¿ por qué?} \Longrightarrow \langle v_k, v_k \rangle \neq 0$$

Así, que $a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. *Lo que muestra que* α *es un conjunto linealmente independiente en* V.

Definición 3.0.8.

Sea V *un* $\mathbb{K}$*-espacio Prehilbertiano y considera* $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ *entonces* α *será llamada una " Base Ortogonal " si*

(1) α *es una base de* V

(2) *Si* $j \neq k$ *entonces* $\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad (v_j \perp v_k)$

Ejemplo 3.0.9.

(1) *sea* $\alpha = c(n)$ *la base canónica de* $\mathbb{C}^n$ *y* $\langle , \rangle$ *el producto interno canónico entonces.*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases}$$

(2) *Sea* $V = \langle \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\} \rangle$ *y define en* V *el producto interno:*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt \tag{179}$$

entonces $\alpha = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$ *es una base ortogonal de* V, *respecto de (179)*

En efecto

$$\begin{aligned}
\langle \sin kt, \cos st\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos st\, dt \quad k \neq s\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+s)t + \sin(k-s)t]\, dt\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+s}\cos(k+s)t\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k-s}\cos(k-s)t\,|_{-\pi}^{\pi}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Usando técnicas de transformación de ángulos analoga a la desarrollada encima obtenemos.

$$\begin{aligned}
\langle \sin kt, \sin st\rangle &= 0 \quad k \neq s\\
\langle \cos kt, \cos st\rangle &= 0 \quad k \neq s
\end{aligned}$$

Observación 3.0.10.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortogonal de V.

(1) Sea $v \in V$, como α es base de V entonces existen n-escalares (en $\mathbb{K}$), digamos $a_1, a_2, \dots a_n$, tales que $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle v, v_k\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k\right\rangle \quad (1 \leq k \leq n)\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k\rangle \quad (1 \leq k \leq n)\\
&= a_k\langle v_k, v_k\rangle \quad (1 \leq k \leq n)
\end{aligned}$$

Así, tenemos la ecuación fundamental.

(180)
$$a_k = \frac{\langle v, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} = \frac{\langle v, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

e.e.

(181)
$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \\ \\ \dfrac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \\ \\ \dfrac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} \end{pmatrix}$$

(2) Sea $v \in V - \{0\}$ entonces

(a) $\|v\| \neq 0$

(b) $v' = \dfrac{v}{\|v\|} \Longrightarrow \|v'\| = 1$

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal de V entonces $\alpha' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ tal que $v'_s = \dfrac{v_s}{\|v_s\|}$ $(1 \leq s \leq n)$ es una base de V tal que

$$\langle v'_i, v'_j \rangle = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$$

Definición 3.0.11.

Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal de V y $v \in V$ entonces

(182) $$a_k = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Será llamado "El k-ésimo coeficiente de Fourier" del vector v.

Definición 3.0.12.

Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. α será llamada una base ortonormal de V si y sólo si:

(1) α es una base de V

(2) $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$

Conclusión 3.0.13.

(1) Para cada $v \in V$ su k-ésima coordenada en un espacio Prehilbertiano será llamada k-ésimo coeficiente de Fourier, definido por la ecuación:

(183) $$a_k = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

(2) Si $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de V entonces dividiendo cada vector de α por su norma (normalizando), obtenemos una nueva base $\alpha' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ que es una base ortonormal de V y

(184) $$a_k = \langle v, v'_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n)$$

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V entonces el producto interno se " canoniza ", en el siguiente sentido:

Sean $v \in V \wedge u \in V$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n}\langle v, v_j\rangle v_j, \sum_{k=1}^{n}\langle u, v_k\rangle v_k\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle v, v_j\rangle\overline{\langle u, v_k\rangle}\langle v_j, v_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle v, v_j\rangle\overline{\langle u, v_j\rangle}
\end{aligned}$$

(4) Las bases ortonormales (ortogonales), se muestran como insuperables en su trabajo, es decir en la misión de determinar las coordenadas (coeficientes de Fourier) de los elementos del espacio vectorial, salvo por un detalle. ¿ existen ?, si existen, ¿ existen en abundancia ?, ¿ son fáciles de ubicar.?

Para responder las preguntas planteadas encima, consideremos la siguiente situación geométrica. Sean $v_1 \in V$ y $v_2 \in V$ tal que $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$ entonces de acuerdo a la figura 6, sabemos que $v_1 \not\perp v_2$, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que los vectores son como en la Figura

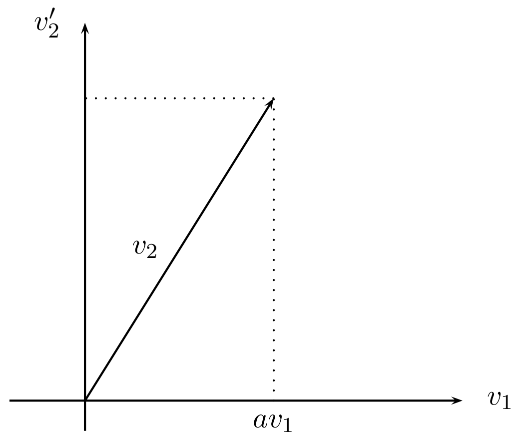

Figura 22

Entonces,

$$v_2 = v_2' + av_1 \tag{185}$$

Lamentablemente, (185) es una ecuación que liga tres datos y sólo conocemos uno !!!, pero, no todo está perdido, pues, observen lo siguiente.

$$\begin{aligned}
v_2 = v_2' + av_1 &\Longrightarrow \langle v_2, v_1\rangle = \langle v_2', v_1\rangle + \langle av_1, v_1\rangle \\
&\Longrightarrow \langle v_2, v_1\rangle = a\langle v_1, v_1\rangle \\
&\Longrightarrow a = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \tag{186}$$

Luego, tenemos lo siguiente:

$$\alpha = \{v_1, v_2\} \text{ base de V } \Longrightarrow \alpha' = \{v_1, v_2'\} \text{ es una base ortogonal de V}$$

Así, podemos resumir como sigue:

$$\begin{gathered}\alpha = \{v_1, v_2\} \text{ base de V}\\ \Downarrow \\ \alpha' = \{v_1, v_2'\} \text{ base ortogonal de V}\\ \Downarrow \\ \alpha'' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}\right\} \text{ base ortonormal de V}\end{gathered}$$

La conclusión anterior puede ser generalizada en el siguiente.

Teorema 3.0.14. *(Ortogonalización de Gram-Schmidt)*

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base V entonces $\alpha' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ es una base ortogonal, donde los v_i' satisfacen la siguiente ecuación vectorial.

$$\begin{cases} v_j' = v_j - \dfrac{\langle v_j, v_{j-1}'\rangle}{\|v_{j-1}'\|^2} v_{j-1}' - \dots - \dfrac{\langle v_j, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' : \quad (2 \le j \le n) \\ v_1' = v_1 \end{cases} \tag{187}$$

En efecto

De (186) sigue que el resultado vale para n=2

Supongamos que v_j' es construido para $(2 \le j \le n-1)$ satisfaciendo (187).
e.e.

$$v_j' = v_j - \frac{\langle v_j, v_{j-1}'\rangle}{\|v_{j-1}'\|^2} v_{j-1}' - \dots - \frac{\langle v_j, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' \quad (2 \le j \le n-1)$$

y $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ es un conjunto ortogonal.
Sea $v_n' = v_n - \dfrac{\langle v_n, v_{j-1}'\rangle}{\|v_{j-1}'\|^2} v_{j-1}' - \dots - \dfrac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1'$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle v_n', v_j'\rangle &= \left\langle v_n - \frac{\langle v_n, v_{j-1}'\rangle}{\|v_{j-1}'\|^2} v_{j-1}' - \dots - \frac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1', v_j'\right\rangle \\
&= \langle v_n, v_j'\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v_{n-i}'\rangle}{\|v_{n-i}'\|^2} \langle v_{n-i}', v_j'\rangle \\
&= \langle v_n, v_j'\rangle - \frac{\langle v_n, v_j'\rangle}{\|v_j'\|^2} \langle v_j', v_j'\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema.

4. Proyección Ortogonal

Motivación 4.0.15.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $W \leq V$ y $v \in V$ un vector arbitrario, como en la figura.

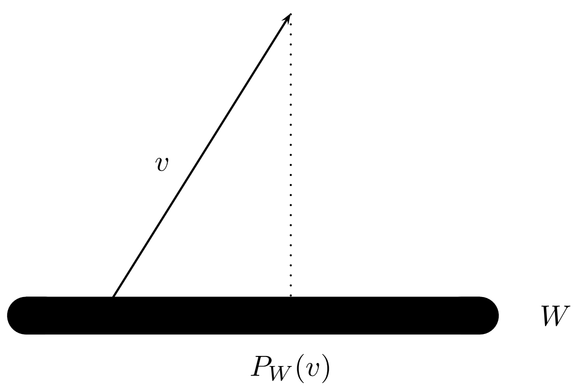

Figura 23

Supongamos que $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, es una base ortogonal de V entonces

(1) *La " Proyección (sombra) de v en W, $P_W(v)$ " es un elemento de W, así que como α es una base ortogonal tenemos para v la representación.*

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j \tag{188}$$

(2) *" La sombra de la sombra es la sombra.". En efecto*

$$\begin{aligned}
(P_W \circ P_W)(v) &= P_W \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j \right] \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{\left\langle \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j, v_k \right\rangle}{\|v_k\|^2} v_k \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \langle v_j, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \\
&= P_W(v)
\end{aligned}$$

(3) $l(d(v)) = \|v - P_W(v)\|$
En efecto

$$v = d(v) + P_W(v) \Longrightarrow l(d(v)) = l(v - P_W(v)) = \|v - P_W(v)\|$$

(4) $d(v) \in W^\perp$
En efecto

$$\begin{aligned}
\langle d(v), v_j\rangle &= \langle v - P_W(v), v_j\rangle \quad (1 \leq j \leq s)\\
&= \langle v, v_j\rangle - \langle P_W(v), v_j\rangle\\
&= \langle v, v_j\rangle - \sum_{k=1}^{s} \frac{\langle v, v_k\rangle}{\|v_k\|^2}\langle v_k, v_j\rangle\\
&= \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle\\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, $d(v) \in W^\perp$

Definición 4.0.16.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $W \leq V$ y $v \in V$ un vector arbitrario entonces llamaremos distancia de v a W al número.

$$d(v, W) = \|v - P_W(v)\| \tag{189}$$

Observación 4.0.17.

Con las propiedades obtenidas para la proyección ortogonal, la distancia obtenida hereda naturalmente,(no pierda la oportunidad de lucirse probándolas) las siguientes propiedades:

(i) $d(v, W) \geq 0 \qquad \wedge\, d(v, W) = 0 \Longleftrightarrow P_W(v) = v$
(ii) $P_W(v) = v \Longleftrightarrow v \in W$
(iii) $d(v, W) = 0 \Longleftrightarrow v \in W$

Conclusión 4.0.18.

Antes de plantear algunos ejercicios, saludables para la comprensión de lo expuesto, quisiera concluir esta sección con algunas reflexiones según mi parecer de importancia capital.

Reflexión 1

El modelamiento en el plano cartesiano usual ($\mathbb{R}^2$) es fácil de hacer y de entender. Pues su " arquitectura " consiste apenas de un par de ejes perpendiculares y todas las traslaciones son inducidas justamente de esa forma.

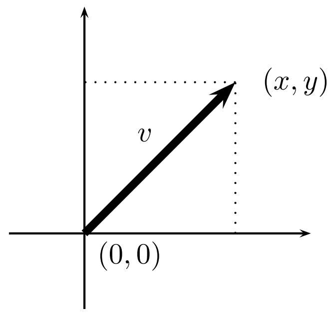

Figura 24

En fin, todo el mundo entiende la expresión geométrica expuesta encima y por si fuera poco también la teórica:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \tag{190}$$

Reflexión 2

La simpleza de $\mathbb{R}^2$ radica en la posibilidad de construir la siguiente figura.

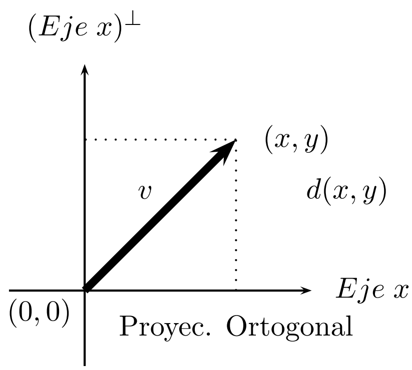

Figura 25

Así que quien simule esa ecuación geométrica es un $\mathbb{R}^2$ en potencia.

Reflexión 3

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n. Si V posee un producto interno entonces V " emula " $\mathbb{K}^2$ En efecto

El algoritmo de simulación es el siguiente:

Etapa 1: Sea W un subespacio de V y $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ una base ortogonal de W entonces calculamos $W^{\perp}$, como sigue:

- Completamos α hasta obtener una base de V, usando el teorema de completamiento de base o mejor, agregando vectores linealmente independientes a los

w_i con $i = 1, \dots, s$ hasta llegar a la la dimensión n de V; digamos

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

- Usando el proceso de Gram Schmidt ortogonalizamos β y obtenemos

$$\alpha' = \{w_1, w_2, \dots, w_s, w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \tag{191}$$

Etapa 2: De la propia construcción de α' en (191),sigue que vale la ecuación

$$\langle w_i^{\perp}, w_j\rangle = 0 \text{ si } \begin{cases} i = s+1, s+2, \dots, n \\ j = 1, 2 \dots, \end{cases} \tag{192}$$

Así que, para cualquier $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle w_j^{\perp}, w\rangle &= \langle w_j^{\perp}, \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\overline{\langle w, w_i\rangle}}{||w_i||^2} \langle w_j^{\perp}, w_i\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\{w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \subset W^{\perp}$, así que por construcción

$$\langle\{w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\}\rangle = W^{\perp}$$

Etapa 3: Finalmente

$$V = W \bigoplus W^{\perp} \tag{193}$$

En realidad falta mostrar que $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$ (¿ por qué ?).

Pero eso es claro pues:

$$\begin{aligned} v \in W \cap W^{\perp} &\iff v \in W \wedge v \in W^{\perp} \\ &\iff v \in W \wedge \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W) \\ &\iff v \in W \wedge \langle v, v\rangle = 0 \\ &\iff v = 0_V \end{aligned}$$

Etapa final La maravillosa visión geométrica sería:

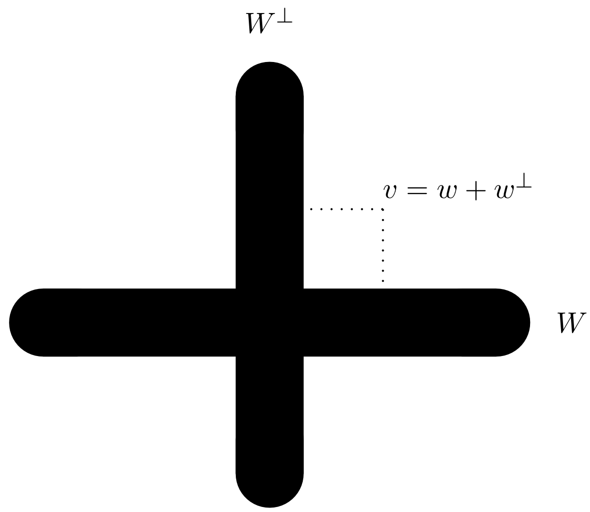

Figura 26

4.1. Ejercicios Propuestos.

(1) En $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, define la función:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \;=\; 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Demuestre que f es un producto interno.

(2) a partir de la base canónica $c(2) = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, determine una base ortogonal $c(2)'$, respecto del producto interno definido en la pregunta 1.

(3) Sea $\alpha = \{(1,2),(2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$
   (a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno usual.
   (c) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno definido en la pregunta 1.

(4) Determine una base ortogonal, respecto del producto interno usual,para el subespacio.

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(5) Si $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual.
   (a) Determine $W^{\perp}$
   (b) Calcule $d((1,1,1), W)$
   (c) Demuestre que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$

(6) Si $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual.
   (a) Determine $W^{\perp}$

(b) Calcule $d((1,1,0,0),W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

(7) Si $W = \{(x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0 \wedge 2t+z=0\}$ entonces usando el producto interno usual.
(a) Determine $W^\perp$
(b) Calcule $d((2,2,3,-6),W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

(8) En el espacio de funciones $C[-\pi,\pi] = \{f : [-\pi,\pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$. Define el producto.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \tag{194}$$

(a) Demuestre que (194), es un producto interno en $C[-\pi,\pi]$
(b) Demuestre que $f(n) = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ es un conjunto ortogonal en $C[-\pi,\pi]$.
(c) Si $W(n) = \langle\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots, \sin nx, \cos nx\}\rangle$ calcule:

(i) $P_W(f)$ si $f(x) = x \; pi < x < \pi$

(ii) $P_W(f)$ si $f(x) = \begin{cases} 1 & : \text{si } pi < x < 0 \\ -1 & : \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

(iii) $d(f,W)$, si $f(x) = x$

(9) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ define el producto.

$$\langle A,B\rangle = tr(B^t \cdot A) \tag{195}$$

(a) Demuestre que (195), es un producto interno en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(b) Si $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine una base ortogonal de W, respecto del producto definido en (195).

(c) Determine P_W

(d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces calcule $d(A,W)$

5. Aplicaciones a la Estadística

5.1. introduccion.

Consideremos un fenómeno o suceso F tal que:

(1) Si F tiene $s_1, s_2, \dots, s_n$ posibilidades distintas de ocurrir entonces construimos el conjunto:

$$S(F) \;=\; \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \tag{196}$$

y (196), se llama "**espacio muestral**" del suceso F.

(2) Si cada s_i posee una probalidad de ocurrencia p_i, para $i = 1, 2, \dots, n$ entonces llamamos

(197) $$p(F) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

y (197) se llama "**vector de probabilidad**" del suceso F

Ejemplo 5.1.1.

Si F representa "el lanzamiento de una moneda", entonces

(a) $S(F) = \{\text{cara,sello}\}$

(b) $p(F) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ejemplo 5.1.2.

Si F representa "el lanzamiento de dos monedas", entonces

(a) $S(F) = \{(\text{cara,cara}),(\text{sello,sello}),(\text{cara,sello})\}$

(b) $p(F) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(3) Si además a cada elemento s_i del espacio muestral asociamos un valor "x_i", para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el vector

(198) $$x(F) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

se llama "**variable aleatoria**", asociada al espacio muestral del suceso F.

Ejemplo 5.1.3.

Si dos personas A y B en (2), deciden hacer la apuesta:

- Si después del lanzamiento de la moneda sale cara A gana \$10
- Si después del lanzamiento de la moneda sale sello B gana \$10

entonces

(a) $S(F) = \{\text{cara,sello}\}$

(b) $p(F) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(c) $x(F, A) = (10, -10)$, variable aleatoria del punto de vista de A

(d) $x(F, A) = (-10, 10)$, variable aleatoria del punto de vista de B

Ejemplo 5.1.4.

Si las mismas personas A y B deciden hacer la apuesta en (2), como sigue:

- Si salen dos caras A gana \$10

- Si salen dos sellos A gana \$7
- Si salen una cara y un sello B gana \$7

entonces la situación es la siguiente:

(a) $S(F) = \{(\text{cara,cara}),(\text{sello,sello}),(\text{cara,sello})\}$

(b) $p(F) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(c) $x(F, A) = (10, 7, -7)$

(d) $x(F, B) = (-10, -7, 7)$

(4) Si $s(F) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $p(F) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $x(F) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ corresponden al espacio muestral, vector de probabilidad y variable aleatoria de un evento F entonces llamaremos

(a) "valor medio o esperado" de $x(F)$ a:

$$\bar{x}(F) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n \tag{199}$$

(b) "varianza" de $x(F)$ a:

$$v[x(F)] = p_1(x_1 - \bar{x}(F))^2 + p_2(x_2 - \bar{x}(F))^2 + \cdots + p_n(x_n - \bar{x}(F))^2 \tag{200}$$

(c) "desviación standar" de $x(F)$ a:

$$d[x(F)] = \sqrt{v[x(F)]} \tag{201}$$

5.2. Un producto interno "estadístico".

Sea $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo entonces define el producto interno:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle_u = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot x_i \cdot y_i \tag{202}$$

Lema 5.2.1.

Si F es un evento entonces

(1) $\bar{x}(F) = \langle x(F), (1, 1, \dots, 1) \rangle_{p(F)}$

(2) $v[x(F)] = \langle x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1), x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1) \rangle_{p(F)}$

(3) $d[x(F)] = \|x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1)\|$

En efecto

Para probar 1 hacemos:

$$\begin{aligned}
\langle x(F),(1,1,\dots,1)\rangle_{p(F)} &= \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot x_i\cdot 1\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot x_i\\
&= \bar{x}(F) \qquad \text{verificar en (199)}
\end{aligned}$$

Para probar 2. hacemos:

$$\langle x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1), x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1)\rangle_{p(F)} = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x}(F))^2 \quad \text{verificar en (200)}$$

Para probar 3. hacemos:

$$\begin{aligned}
\|x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1)\| &= \|(x_1-\bar{x}(F), x_2-\bar{x}(F)\dots, x_n-\bar{x}(F))\|\\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x}(F))^2}\\
&= \sqrt{v[x(F)]} \quad \text{verificar en (201)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.2.

Para el suceso relatado en 2, tenemos la información:

- $s(F) = \{$ cara, sello$\}$
- $p(F) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
- $x(F,A) = (10,-10)$, variable aleatoria del punto de vista de A
- $x(F,A) = (-10,10)$, variable aleatoria del punto de vista de B

Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{x}(F,A) &= \langle (10,-10),(1,1)\rangle\\
&= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-10)\cdot 1\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}(F,B) &= \langle (-10,10),(1,1)\rangle\\
&= \frac{1}{2}\cdot(-10)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[x(F,A)] &= \|(10,-10)\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}10^2+\frac{1}{2}(-10)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[x(F,B)] &= \|(-10,10)\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-10)^2+\frac{1}{2}10^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

5.3. Correlación.

Sea F un evento n-dimensional, es decir:

- $s(F) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ es su espacio muestral.
- $p(F) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es su vector probablidad.

Supongamos que es posible asociar a dos comportamientos de F, dos variables aleatorias, digamos $x(F,A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $x(F,B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
Ahora queremos estudiar las posibles relaciones entre $x(F,A)$ y $x(F,B)$.

(1) Tenemos en primer lugar un valor esperado para cada caso:

- $\bar{x}(F,A) = \sum\limits_{i=1} np_i x_i$
- $\bar{x}(F,B) = \sum\limits_{i=1} np_i y_i$

(2) Podemos construir los vectores asociados:

$$\begin{aligned} x(F,A) - \bar{x}(F,A)(1,1,\dots,1) &= (x_1 - \bar{x}(F,A), x_2 - \bar{x}(F,A), \dots, x_n - \bar{x}(F,A)) \\ x(F,B) - \bar{x}(F,B)(1,1,\dots,1) &= (y_1 - \bar{x}(F,B), y_2 - \bar{x}(F,B), \dots, y_n - \bar{x}(F,B)) \end{aligned}$$

(3) El conjunto

$$C = \{(x_1 - \bar{x}(F,A), \dots, x_n - \bar{x}(F,A)), (y_1 - \bar{x}(F,B), \dots, y_n - \bar{x}(F,B))\} \tag{203}$$

es linealmente independiente o linealmente dependiente , así que tenemos dos casos:

- Caso 1.

C es Linealmente dependiente. Luego existe, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

$$x(F,B) = \lambda x(F,A)$$

Es decir, $x(F,A)$ y $x(F,B)$ están relacionados o uno es dependiente. Ahora

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} \\
&= \frac{\langle x(F,A), \lambda x(F,A)\rangle}{\|x(F,A)\|\|\lambda x(F,A)\|} \\
&= \frac{\lambda\langle x(F,A), x(F,A)\rangle}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} \\
&= \frac{\lambda\|x(F,A)\|^2}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} \\
&= \frac{\lambda}{|\lambda|} \\
&= \begin{cases} 1: & \text{si } \lambda > 0 \\ -1: & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \text{ó} \\ \pi \end{cases} \tag{204}$$

- Caso 2

C es Linealmente independiente. Luego no existe relación entre $x(F,A)$ y $x(F,B)$

Definición 5.3.1.

Llamaremos "**coeficiente de correlación**" de $x(F,A)$ y $x(F,B)$ a

$$r(x(F,A), x(F,B)) = \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} \tag{205}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
r(x(F,A), x(F,B)) &= \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F,A))(y_i - \bar{x}(F,B))}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F,A))^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{x}(F,B))^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.2.

Consideremos un grupo de 10 atletas de los cuales conocemos sus registros de 1 a 10 en dos pruebas; prueba1 y prueba2, según la tabla:

atleta		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
registro	prueba 1	2	8	5	7	7	5	3	1	9	9
	prueba 2	1	9	7	2	7	4	6	3	9	7

Figura 27

Estudiemos la correlación entre el rendimiento de los atletas en ambas pruebas:

(1) El espacio muestral será:

$$s(F) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \tag{206}$$

(2) El vector probabilidad es:

$$p(F) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) \tag{207}$$

(3) Si notamos prueba i=p_i, para $i = 1, 2$ entonces

$$x(F, p_1) = (2, 8, 5, 7, 7, 5, 3, 1, 9, 9) \tag{208}$$

$$x(F, p_2) = (1, 9, 7, 2, 7, 4, 6, 3, 9, 7) \tag{209}$$

Ahora, comenzamos a calcular:

- De (207) y (208), tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{x}(F, p_1) &= \frac{1}{10} \cdot 56 \\ &= 5.6 \end{aligned} \tag{210}$$

- De (207) y (209), tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{x}(F, p_2) &= \frac{1}{10} \cdot 55 \\ &= 5.5 \end{aligned} \tag{211}$$

- De (208) y (210), tenemos que

$$x(F, p_1) - \bar{x}(F, p_1)(1, 1, \dots, 1) = (-3.6, 2.4, -0.6, \dots, 3.4) \tag{212}$$

- De (209) y (211), tenemos que

$$x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1) \;=\; (-4.5,3.5,1.5,\dots,1.5) \tag{213}$$

- Además, de (212) y (213) tenemos que

$$\langle x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1), x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\rangle \;\approx\; 4.9 \tag{214}$$

$$\|x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1)\| \;\approx\; 7.4 \tag{215}$$

$$\|x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\| \;\approx\; 7.2 \tag{216}$$

- Finalmente de (214), (215), (216), obtenemos que:

$$r(x(F,p_1),x(F,p_2)) \;\approx\; 0.67 \tag{217}$$

6. Mínimos cuadrados y sistemas de ecuaciones

Consideremos un sistema lineal de orden $(n\times m)$

$$A\cdot X = B \qquad (\star) \tag{218}$$

donde $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)$ $\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ entonces sabemos que

$(\star)$ tiene solución si y sólo si rango (A)=rango (A_a), donde A_a representa la matriz ampliada asociada al sistema $(\star)$.

Teorema 6.0.3.

$(\star)$ tiene solución si y sólo si B pertenece al espacio generado por las columnas de A.

En efecto

$$A\cdot X = B \iff \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

$$\iff x_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix} + \dots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Del resultado obtenido encima, sigue que

$$(\star) \text{ tiene solución} \iff B \in \Omega(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Así $\Omega(A)$, representara el subespacio generado por las columnas de la matriz A.

Observación 6.0.4.

Supongamos que el sistema lineal (218), no tiene solución:

(1) Del teorema (6), sigue que

$$B \notin \Omega(A)$$

(2) Si $P_{\Omega(A)}(B)$ representa la proyección ortogonal de B en $\Omega(A)$ entonces

$$P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)$$

y luego, aplicando nuevamente el teorema (6) existe $\widehat{X} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$ tal que

$$A \cdot \widehat{X} = P_{\Omega(A)}(B) \tag{219}$$

y la distancia $d(B, \Omega(A) = \|B - P_{\Omega(A)}(B)\|$, es mínima.

(3) Luego, $B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp}$ y si notamos las columnas de A, de la forma:

$$col(A)_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad (1 \leq j \leq m)$$

entonces

$$\left\langle col(A)_j, B - P_{\Omega(A)}(B) \right\rangle = 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} 0 &= col(A)_j^t \cdot [B - P_{\Omega(A)}(B)] \qquad (1 \leq j \leq m) \\ &= col(A)_j^t \cdot B - col(A)_j^t \cdot P_{\Omega(A)}(B) \qquad (1 \leq j \leq m) \\ &\overset{(\ 219)}{=} col(A)_j^t \cdot B - col(A)_j^t A \cdot \widehat{X} \qquad (1 \leq j \leq m) \end{aligned}$$

Luego,

$$B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp} \iff A^t \cdot B = A^t A \cdot \widehat{X} \tag{220}$$

Definición 6.0.5.

Dado un sistema lineal de orden $(n \times m)$, como $\star$ entonces cualquier solución de la ecuación matricial

$$A^t \cdot B = A^t A \cdot \widehat{X} \tag{221}$$

será llamada una solución por mínimos cuadrados de $(\star)$

Teorema 6.0.6.

Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$. Si $\rho(A) = m$, (donde $\rho(A)$ es el rango de la matriz A) entonces $A^t \cdot A$ es invertible y el sistema lineal asociado a la matriz A, tiene una única solución por mínimos cuadrados dada por:

$$\widehat{X} \quad = \quad (A^t \cdot A)^{-1} A^t B$$

En efecto

$$\begin{aligned} A^t \cdot A \quad \text{invertible} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ker(A^t \cdot A) = \{(0)\} \\ &\Longleftrightarrow \quad A^t \cdot A \cdot X = (0) \Longrightarrow X = (0) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^t \cdot A \cdot X = (0) \quad &\Longrightarrow \quad X^t \cdot A^t \cdot A \cdot X = (0) \\ &\Longrightarrow \quad (A \cdot X)^t \cdot A \cdot X = (0) \\ &\Longrightarrow \quad \langle A \cdot X, A \cdot X \rangle = (0) \\ &\Longrightarrow \quad A \cdot X = (0) \\ &\Longrightarrow \quad x_1 \cdot col(A)_1 + x_2 \cdot col(A)_2 + \cdots + x_n \cdot col(A)_n = (0) \\ &\Longrightarrow \quad X = (0), \qquad \text{(pues las columnas de } A \text{ son linealmente independientes)} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.0.7.

(1) Resolvamos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcr|} x & + & 4y & - & 5z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & - & 6z & = & 7 \\ \hline \end{array} \tag{222}$$

Etapa 1. (222) se escribe matricialmente como sigue

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} \tag{223}$$

Etapa 2. Calculamos $\rho(A)$, escalonando la matriz A por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 + L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_2 + 2L_1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 12 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(L_4 \longrightarrow L_4 - 2L_3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, $\rho(A) = 3$ y $\rho(A_a) = 4$, así que por una parte $\rho(A)$ es máximo y por otra el sistema (222) no tiene solución.

Etapa 3. De acuerdo al teorema (6.0.6), $A^t \cdot A$ es invertible y la ecuación $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$, tiene solución única. Así que una alternativa es escalonar para aplicar el teorema del rango o bien calcular $(A^t \cdot A)^{-1}$, optaremos por la primera.

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} A^t \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix} \tag{224}$$

Etapa 4. Debemos finalmente resolver (224), escalonando su matriz ampliada correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & 37 & -51 & 44 \\ 8 & -51 & 47 & -62 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.36936168 \\ 0 & 1 & 0 & 1.31037985 \\ 0 & 0 & 1 & 0.11689171 \end{pmatrix}$$

Así que la solución por mínimos cuadrados es:

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0.36936168 \\ 1.31037985 \\ 0.11689171 \end{pmatrix} \tag{225}$$

6.1. Recta de mínímos cuadrados.

Consideremos una coleción finita de puntos del plano; digamos

$$\P = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)\} \tag{226}$$

tal que $a_i \neq a_j$ para algún i y para algún j, $(1 \leq i \leq n)$ y $(1 \leq j \leq n)$ entonces la recta "que mejor se ajuste "a la colección de puntos (226), la llamaremos "recta de mínimos cuadrados ".

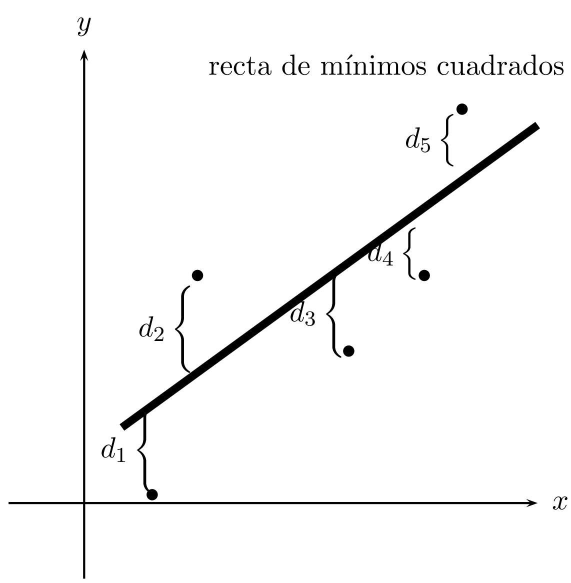

Figura 28

Si suponemos que la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es dada por al ecuación:

$$(RMC) \quad : \qquad y = m_1 x + m_0 \tag{227}$$

entonces a partir de (227), tenemos las ecuación básica (EB)

$$(EB) \quad : \qquad b_i = m_1a_i + m_0 + d_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

donde;

$$d_i \neq 0 \iff (a_i, b_i) \notin (RMC) \quad \text{ver Figura encima}$$

Así que, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_1 &= m_1a_1 + m_0 + d_1 \\ b_2 &= m_1a_2 + m_0 + d_2 \\ b_3 &= m_1a_3 + m_0 + d_3 \\ &\vdots \\ b_n &= m_1a_n + m_0 + d_n \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$(228) \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D}$$

Finalmente;

(1) como $a_i \neq a_j$, para algún i y para algún j entonces $\rho(A) = 2$ y entonces del teorema (6.0.6), sigue que el sistema $A \cdot X = B$ tiene una solución única por mínimos cuadrados, dada por $\widehat{X} = (A^tA)^{-1}A^tB$

(2) Como $D = B - A \cdot X$ entonces D, representa la menor magnitud posible

Ejemplo 6.1.1.

En la fabricación de un producto químico $\mathbb{Q}$, se detecta que la cantidad de un compuesto químico p, es controlada por la cantidad del producto químico c utilizado en el proceso. Al producir un litro de $\mathbb{Q}$, se detectaron las cantidades de p y c, presente y usada respectivamente, según la tabla:

(229)

c ocupada	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p existente	4.5	5.5	5.7	6.6	7.0	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7

Suponga que p y c están relacionados por una "ecuación lineal ".
El gráfico de la tabla es de la forma:

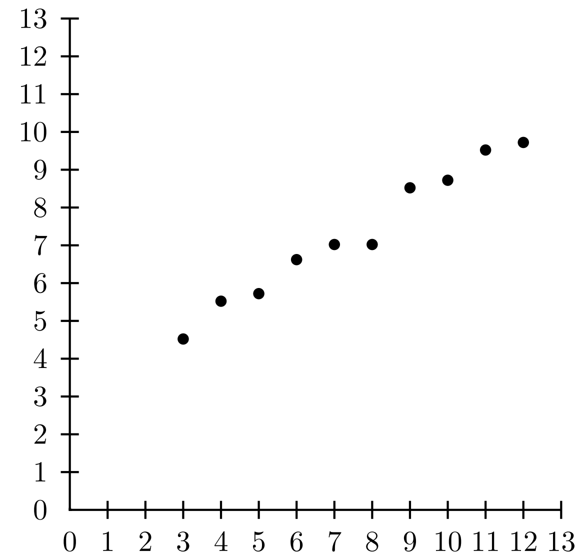

Figura 29

(1) Determinemos la ecuación para la recta de mínimos cuadrados.

Etapa 1. El sistema que corresponde es de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X}$$

Etapa 2. Como el rango de A es 2 entonces hay solución única. Así que debemos calcular A^tA y A^tB.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 645 & 75 \\ 75 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^tB = \begin{pmatrix} 598.6 \\ 73.4 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es dada por:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.583 \\ 2.967 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego la recta pedida es de la forma:

$$p = 0.583c + 2.967$$

y su gráfico es de la forma:

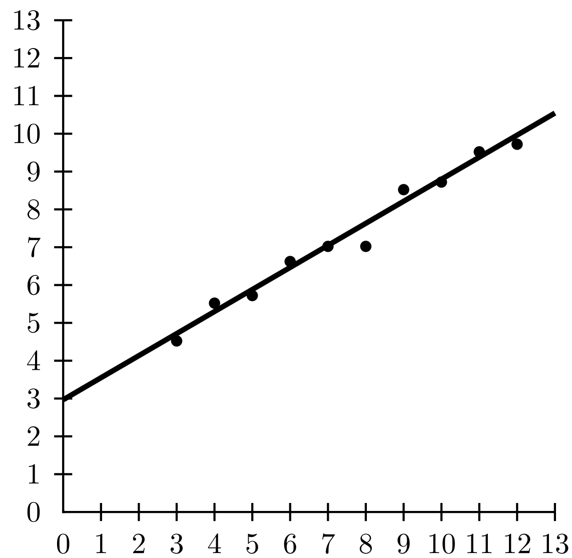

Figura 30

Observación 6.1.2.

Consideremos nuevamente la coleción ¶ en (226), es decir

$$\P = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$$

Pero ahora, supongamos que al menos $m+1$ de los a_i son distintos entonces podemos aproximar al conjunto ¶ por un polinomio de la forma:

$$PMC \quad : \qquad y = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i \qquad (m \leq n+1)$$

La ecuación básica en este caso es dada por:

$$b_j = \sum_{i=0}^{m} c_i a_j^i + d_j \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{230}$$

y $d \neq 0 \Longleftrightarrow (a_j, b_j) \notin (PMC)$

A partir de (230), podemos construir el sistema de ecuaciones:

(231)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D}$$

Como existen al menos $m+1$, a_i distintos entonces $\rho(A) = m+1$ y del sistema (231) y del teorema (6.0.6), sigue que el sistema asociado $A \cdot X = B$ tiene un solución única de la forma $X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$.

Ejemplo 6.1.3.

(1) Ajustemos la siguiente tabla de datos

(232)

x	0	1	2
y	1.1	0.1	-3.1

por un polinomio cuadrático $q(x) = a + bx + cx^2$
Solución

Etapa 1. El gráfico de los puntos es el siguiente:

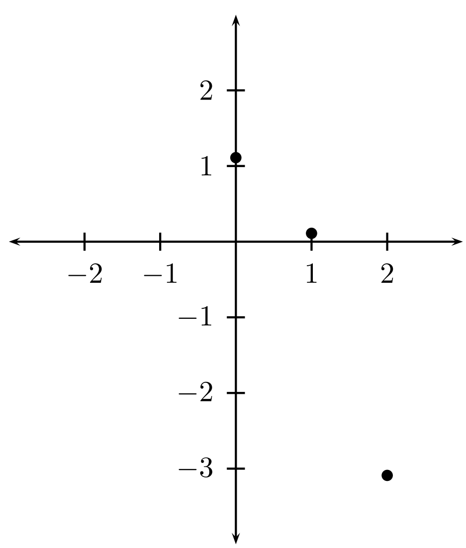

Figura 31

Etapa 2. El sistema general asociado a la situación es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} \tag{233}$$

Etapa 3. Resolvemos el sistema $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$

- Calculamos $A^t \cdot A$ y $A^t \cdot B$

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^t \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1.9 \\ -6.1 \\ -12.3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Escalonamos la matriz ampliada $[A^t \cdot A|A^t \cdot B]$.

$$\begin{aligned} [A^t \cdot A|A^t \cdot B] &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -1.9 \\ 3 & 5 & 9 & -6.1 \\ 5 & 9 & 17 & -12.3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.10001 \\ 0 & 1 & 0 & 0.09999 \\ 0 & 0 & 1 & -1.09999 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, el polinomio de los mínimos cuadrados es:

$$q(x) = 1.10001 + 0.09999x - 1.09999x^2 \tag{234}$$

Etapa 4. El gráfico de (234) es:

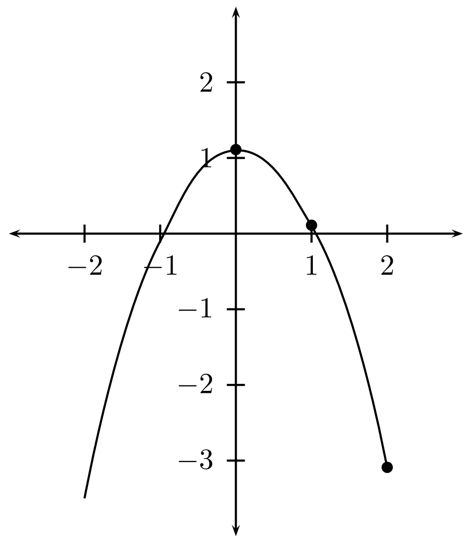

Figura 32

7. El método de los mínimos cuadrados

Consideremos una función $y = f(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y supongamos que conocemos sólo n valores de ella , digamos $f(x_i) = y_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$.

El problema es "¿ Cómo conseguir una curva que pase por los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$? y que cumpla con las particularidades de la función f, salvo probablemente cometiendo errores controlados "equivalentemente ¿ bajo qué condiciones podemos obtener una aproximación al comportamiento geométrico de la función f ?

(1) Supongamos que existe un conjunto de funciones $\alpha = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ tal que

- α es linealmente independiente en el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}$
- $g_i(x_j) \in \mathbb{R}$, para $(i = 1, 2, \ldots, n)$

(2) Sea $W = \langle\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}\rangle$ el espacio vectorial generado por α. Define en W el producto interno:

$$\langle h, s\rangle = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)s(x_i) \tag{235}$$

entonces a partir de (235), podemos definir una norma:

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sqrt{\langle h, h\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)]^2} \end{aligned} \tag{236}$$

Así que f es aproximable por $g \in W$ si y sólo si la distancia $d(f,g)$, es mínima, esto es equivalente a decir que $(f-g) \in W^{\perp}$, así que en particular deben verificarse simultáneamente las ecuaciones:

$$\langle g_i, f-g\rangle = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{237}$$

(3) Finalmente si $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle g_i, f-g\rangle \\ &= \langle g_i, f-\sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle \\ &= \langle g_i, f\rangle - \langle g_i, \sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle \\ &= \langle g_i, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle g_i, g_j\rangle \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} g \approx f \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle g_i, f\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle g_i, g_j\rangle \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} g_i(x_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} g_i(x_k) g_j(x_k) \quad (i=1,2,\ldots,n) \end{aligned} \tag{238}$$

(238) se conoce como "método de los mínimos cuadrados"

Ejemplo 7.0.4.

Supongamos que $y=f(x)$ es una función tal que verifica los valores:

x	0	1	2
$f(x)$	1.1	0.1	-3.1

y que deseamos aproximar segun el método de los mínimos cuadrados por la función $g(x) = c_1 + c_2 x^2$ entonces

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 \\ g_2(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Así que (238) para este caso, consiste en:

$$\langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \tag{239}$$

$$\langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle \tag{240}$$

Como conocemos los valores de f y g_i, para $i = 1, 2$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle g_1, f\rangle &= 1\cdot 1.1 + 1\cdot 0.1 + 1\cdot(-3.1)\\
&= -1.9\\[1em]
\langle g_1, g_1\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1\\
&= 3\\[1em]
\langle g_1, g_2\rangle &= 1\cdot 0^1 + 1\cdot 1^2 + 1\cdot 2^2\\
&= 5\\[1em]
\langle g_2, g1\rangle &= 0^2\cdot 1 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1\\
&= 5\\
\langle g_2, g_2\rangle &= 0^2\cdot 0^2 + 1^2\cdot 1^2 + 2^2\cdot 2^2\\
&= 17\\[1em]
\langle g_2, f\rangle &= 0^2\cdot 1.1 + 1^2\cdot 0.1 + 2^2\cdot(-3.1)\\
&= -12.3
\end{aligned}$$

así que sustituyendo en (239) y (240) tenemos el sistema:

(241)
$$\begin{array}{rcrcr|}
3c_1 & + & 5c_2 & = & -1.9\\
5c_1 & + & 17c_2 & = & -12.3\\ \hline
\end{array}$$

De donde $c_1 \approx 1.12$ y $c_2 \approx -1.05$ así que la función que mejor aproxima a la función f, según este método es:

(242)
$$g(x) \;=\; 1.12 - 1.05x^2$$

El gráfico de la función g es aproximadamente:

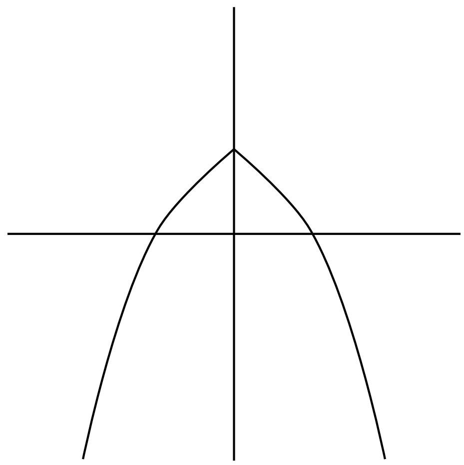

Figura 33

Ejemplo 7.0.5.

Supongamos que la población de una cierta localidad ha variado en el tiempo, según la tabla:

(243)

	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$
año	1950	1960	170	1980
$\underbrace{\text{población}}_{f(t)} \times 10^4$	1.0	1.5	1.8	2.0

Supongamos que queremos aproximar los puntos de la tabla por una función del tipo:

$$g(t) \quad = \quad a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

entonces ¿ cúal será la población en el 2000 ?
Según el método de los mínimos cuadrados debemos tener para este caso:

- $g_1(t) = 1$
- $g_2(t) = t$
- $g_3(t) = t^2$

Así que:

$$\begin{aligned}
\langle g_1, f)\rangle &= a_0\langle g_1, g_1)\rangle + a_1\langle g_1, g_2)\rangle + a_2\langle g_1, g_3)\rangle \\
&= 6.3 \\
\\
\langle g_2, f)\rangle &= a_0\langle g_2, g_1)\rangle + a_1\langle g_2, g_2)\rangle + a_2\langle g_2, g_3)\rangle \\
&= 36.3 \\
\\
\langle g_3, f)\rangle &= a_0\langle g_3, g_1)\rangle + a_1\langle g_3, g_2)\rangle + a_2\langle g_3, g_3)\rangle \\
&= 216.3
\end{aligned}$$

Luego resolviendo el sistema para estos valores tenemos que:

- $a_0 = -2.415$
- $a_1 = 1.155$
- $a_2 = -0.075$

Por tanto la función que aproxima es de la forma:

$$g(t) = -2.415 + 1.155t - 0.075t^2 \tag{244}$$

así que la población esperada según esta aproximación es dada por:

$$\begin{aligned}
g(9) \times 10^4 &= 1.905 \times 10^4 \\
&= 19050
\end{aligned} \tag{245}$$

Ejemplo 7.0.6.

En (7) tratemos de predecir la población, usando para aproximar una función del tipo $g(t) = a \cdot e^{bt}$. Para aplicar el método de los mínimos cuadrados podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(t) \approx a \cdot e^{bt} &\iff \ln f(t) \approx \ln a \cdot e^{bt} \\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + \ln e^{bt} \\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + bt \ln e \\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + bt
\end{aligned}$$

Así que en este caso tenemos que:

$$g(t) = \ln a + bt$$

Es claro que también tenemos que modificar la tabla anterior, es decir (243) se transforma aplicando ln en:

(246)

	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$
año	1950	1960	170	1980
$\underbrace{\text{población}}_{\ln f(t)} \times 10^4$	0.0	0.405	0.588	0.693

Finalmente si llamamos:

- $F(t) = \ln f(t)$
- $c_1 = \ln a$ y $g_1(t) = 1$
- $c_2 = b$ y $g_2(t) = t$

entonces según la tabla (246) tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle g_1, F\rangle &= 1.686 \\ \langle g_2, F\rangle &= 10.404 \\ \langle g_1, g_1\rangle &= 4 \\ \langle g_1, g_2\rangle &= 22 \\ \langle g_2, g_1\rangle &= 22 \\ \langle g_2, g_2\rangle &= 126 \end{aligned}$$

Así que obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{rcrcr|} 4c_1 & + & 22c_2 & = & 1.686 \\ 22c_1 & + & 126c_2 & = & 10.404 \\ \hline \end{array} \tag{247}$$

Resolviendo el sistema (247) tenemos que:

$$c_1 \approx 0.226 \implies a = 0.439$$

$$c_2 \approx 0.226 \implies b = 0.226$$

Luego de estos resultados concluimos que:

(1) $g(t) = 0.439e^{0.226t} \Longrightarrow g(9) = 3.356$

(2) Así que finalmente tenemos en este caso:

$$\text{población } \times 10^4 = F(9) \times 10^4 \approx 3.356 \times 10^4 = 33560 \text{ personas} \tag{248}$$

8. Operadores Especiales

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V, entonces tenemos el isomorfismo natural entre V y su espacio coordenado $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$, es decir:

$$\begin{array}{cccccc} [\,] & : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \\ & & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array}$$

tal que

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, v_1\rangle \\ \langle v, v_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n\rangle \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i \tag{249}$$

Ahora, partiendo de la " teoría ", tenemos que si $u \in V$ y $v \in V$ entonces de (249), sigue que

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \overline{\langle v, v_i\rangle} \tag{250}$$

Así que tenemos el siguiente.

Teorema 8.0.7.

Si $\langle , \rangle$ es un producto interno en el espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ entonces $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$ es un espacio con producto interno, sobre $\mathbb{K}$, donde

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t \overline{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b}_i \tag{251}$$

En particular,

$$\langle [u]_\alpha, [v]_\alpha\rangle = [u]_\alpha^t \overline{[v]_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \overline{\langle v, v_i\rangle}$$

Observación 8.0.8.

Sea $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ otra base ortonormal de V entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (V, \alpha) & \stackrel{1_V}{\longmapsto} & (V, \beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) & \stackrel{[I]_\alpha^\beta}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \end{array} \tag{252}$$

Donde,

$$[I]_\alpha^\beta = (\langle v_i, w_j\rangle) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) \tag{253}$$

Equivalentemente,

$$[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta, [v_2]_\beta, \dots, [v_n]_\beta) \tag{254}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle [v_k]_\beta, [v_s]_\beta\rangle &= [v_k]_\beta^t \overline{[v_s]}_\beta \\ &= \langle v_k, v_s\rangle \end{aligned}$$

$$\langle [v_k]_\beta, [v_s]_\beta\rangle = \begin{cases} 1 & : k \neq s \\ 0 & : otrocaso \end{cases} \tag{255}$$

Luego, las columnas de la matriz cambio de base $[I]_\alpha^\beta$ son ortogonales dos a dos. Tal resultado lo podemos archivar de la forma siguiente:

Teorema 8.0.9.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ dos bases ortonormales de V entonces

$$\begin{array}{rcl} [I]_{\alpha}^{\beta}\left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^t & = & I_n \\ & \Updownarrow & \\ \left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^t & = & \left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} \\ & \Updownarrow & \\ \left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^t & = & [I]_{\beta}^{\alpha} \end{array}$$

Ejemplo 8.0.10.

En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual considera las bases ortonormales

$$c(2) = \{(1,0), (0,1)\} \quad \wedge \quad \alpha = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned} [I]_{c(2)}^{\alpha} &= \begin{pmatrix} \langle (1,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\rangle & \langle (0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\rangle \\ \\ \langle (1,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\rangle & \langle (0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\rangle \end{pmatrix} \\ \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además,

$$[I]_{\alpha}^{c(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que:

(1) $\left([I]_{c(2)}^{\alpha}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observación 8.0.11.

Sabemos que tenemos un diagrama conmutativo como (252), para el caso de un operador T, arbitrario y dos bases ortonormales, digamos α y β, tambien arbitrarias:

$$\begin{array}{ccc} (V,\alpha) & \stackrel{T}{\longmapsto} & (V,\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) & \stackrel{[T]_\alpha^\beta}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{array} \tag{256}$$

Así que en este caso tenemos lo siguiente:
etapa 1:

$$[T]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha \quad = \quad [T(v)]_\beta \tag{257}$$

Etapa 2:

$$\begin{aligned} \langle T(v), w\rangle &= \langle [T(v)]_\beta, [w]_\beta\rangle \\ &= ([T(v)]_\beta)^t\cdot\overline{[w]_\beta} \\ &= \left([T]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha\right)^t\cdot\overline{[w]_\beta} \\ &= ([v]_\alpha)^t\cdot\left([T]_\alpha^\beta\right)^t\cdot\overline{[w]_\beta} \\ &= ([v]_\alpha)^t\cdot\overline{\overline{\left([T]_\alpha^\beta\right)^t}\cdot[w]_\beta} \end{aligned}$$

Etapa 3: Define la función;

$$\begin{array}{cccc} T^\star & : & (V,\alpha) & \longmapsto & (V,\beta) \\ & & v & \longmapsto & T^\star(v) \end{array}$$

Tal que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^\star(w)\rangle$

Observación 8.0.12.

(1) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Sea $L \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ entonces

(a) $\overline{L(v_i)} \in \mathbb{K} \Longrightarrow v = \sum_{i=1}^n \overline{L(v_i)}v_i \in V$

(b) Define

$$\begin{array}{ccccc} \psi_v & : & V & \longmapsto & \mathbb{K} \\ & & w & \longmapsto & \psi_v(w) = \langle w, v\rangle \end{array} \tag{258}$$

entonces

(i) $\psi_v \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$

(ii) Como $\psi_v(w) = \langle w, v\rangle$ $(\forall w; w\in V)$ entonces en particular

$$\begin{aligned} \psi_v(v_j) &= \langle v_j, \sum_{i=1}^n \overline{L(v_i)}v_i\rangle \quad (1\le j\le n) \\ &= \sum_{i=1}^n L(v_i)\langle v_i, v_j\rangle \\ &= L(v_j) \qquad (1\le j\le n) \end{aligned}$$

Luego,

$$\psi_v = L$$

(c) Supongamos que existe $v' \in V$ tal que $L(w) = \langle w, v' \rangle$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle v - v', v - v' \rangle &= \langle v, v \rangle - \langle v, v' \rangle - \langle v', v \rangle + \langle v', v' \rangle \\
&= L(v) - L(v) - L(v') + L(v') \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$v = v'$$

Así que hemos demostrado el siguiente:

Teorema 8.0.13. *(Teorema de Representación)*

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $L \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ entonces existe un único vector $v \in V$ tal que

(259) $$L(w) = \langle w, v \rangle \qquad (\forall w; w \in V)$$

(2) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces

(a) Para cada $u \in V$, define

(260) $$\begin{array}{rcccl} \psi_u & : & V & \longmapsto & \mathbb{K} \\ & & w & \longmapsto & \psi_u(w) = \langle T(w), u \rangle \end{array}$$

entonces $\psi_u \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, $(\forall u; u \in V)$

(b) De (1), sigue que existe un único $v \in V$ tal que

$$\psi_u(w) = \langle w, v \rangle$$

Luego, tenemos que existe un único $v \in V$ tal que tiene sentido la siguiente ecuación para cada $u \in V$

(261) $$\langle T(w), u \rangle = \langle w, v \rangle$$

(c) Motivado por (261), podemos definir

(262) $$T^\star \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \text{ tal que } T^\star(u) = v \Longleftrightarrow \psi_u(w) = \langle w, v \rangle$$

(d) Así, tenemos que existe un único operador $T^\star$ de V que satisface la ecuación vectorial.

$$\langle T(w), u \rangle = \langle w, T^\star(u) \rangle$$

Finalmente, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 8.0.14.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces existe un único operador $T^\star$ de V tal que satisface la ecuación vectorial.

(263) $$\langle T(w), u \rangle = \langle w, T^\star(u) \rangle$$

Definición 8.0.15.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces llamaremos Adjunto de T al único operador $T^\star$ de V que satisface la ecuación vectorial, (263)

Teorema 8.0.16.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces

$$[T^\star]_\alpha^\alpha = \left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t \tag{264}$$

En efecto

(1) $T(v_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle T(v_i), v_j\rangle v_j \quad (1 \leq i \leq n)$

Luego,

$$[T]_\alpha^\alpha = (\langle T(v_i), v_j\rangle)^t \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$$

(2) Como $T^\star \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ entonces tiene sentido determinar $[T^\star]_\alpha^\alpha$, luego en forma analoga al cálculo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} T^\star(v_i) &= \sum_{j=1}^{n} \langle T^\star(v_i), v_j\rangle v_j \quad (1 \leq i \leq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle (v_j), T^\star(v_i)\rangle} v_j \quad (1 \leq i \leq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle T(v_j), v_i\rangle} v_j \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Así que

$$[T^\star]_\alpha^\alpha = \left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t$$

(3) Sea β otra base ortonortmal de V entonces

$$\begin{aligned} [T^\star]_\beta^\beta &= [I]_\alpha^\beta \, [T^\star]_\alpha^\alpha \, [I]_\beta^\alpha \\ &= [I]_\alpha^\beta \left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t [I]_\beta^\alpha \\ &= \left([I]_\beta^\alpha\right)^t \left(\overline{[T]_\alpha^\alpha}\right)^t \left([I]_\alpha^\beta\right)^t \\ &= \left([I]_\alpha^\beta \, \overline{[T]_\alpha^\alpha} \, [I]_\beta^\alpha\right)^t \\ &= \left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)^t \end{aligned}$$

(4) Así que, podemos notar:

$$T^\star = \overline{T}^t \tag{265}$$

Ejemplo 8.0.17.

(1) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ tal que $T(1,0) = (1+i, 2)$ y $T(0,1) = (i, i)$ entonces

(a) $[T]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix}$

(b) Luego, el operador adjunto de T es:

$$[T^\star]_{c(2)}^{c(2)} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

(2) Sea $[T]_{c(3)}^{c(3)} = (a_{ks}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)$ tal que $a_{ks} = i^{k+s}$ entonces $T^\star$ es diagonalizable.

En efecto

(a) Como, $[T]_{c(3)}^{c(3)} = (i^{k+s})$ entonces

$$[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Así la matriz de operador adjunto es:

$$[T^\star]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Ahora calculamos los valores propios de $T^\star$, vía el polinomio característico $P_{T^\star}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P_{T^\star}(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} (\lambda+1) & -i & -1 \\ -i & (\lambda-1) & i \\ -1 & i & (\lambda+1) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} (\lambda+1) & -i & -1 \\ 0 & \lambda & -i\lambda \\ -1 & i & (\lambda+1) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)[\lambda(\lambda+1)-\lambda]-[-\lambda+\lambda] \\ &= \lambda^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Luego, los valores propios de $T^\star$ son $v.p. = \{0, -1\}$

(d) Aplicando ahora el criterio del polinomio minimal tenemos:

$$\begin{aligned} [T^\star]_{c(3)}^{c(3)}\left([T^\star]_{c(3)}^{c(3)} + I_3\right) &= \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $T^\star$ es diagonalizable

(e) Determinemos la base que diagonaliza la matriz $[T^\star]_{c(3)}^{c(3)}$.
El procedimiento general es.

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_\lambda &\iff v \in \mathbb{C}^3 \wedge T^\star(v) = \lambda v\\
&\iff v = [(x,y,z)]_{c(3)} \quad \wedge \quad [T^\star]_{c(3)}^{c(3)}[(x,y,z)]_{c(3)} = \\
&\quad [(\lambda x, \lambda y, \lambda z]_{c(3)}\\
&\iff v = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcr|} -x & + & iy & + & z & = & \lambda x\\ ix & + & y & - & iz & = & \lambda y\\ x & - & iy & - & z & = & \lambda z \\ \hline \end{array} \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

(i) En particular;

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_0 &\iff v = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcr|} -x & + & iy & + & z & = & 0\\ ix & + & y & - & iz & = & 0\\ x & - & iy & - & z & = & 0 \\ \hline \end{array}\\
&\iff v \in \langle\{(1,-i,0),(0,i,1)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\left(\mathbb{C}^3\right)_0 = \langle\{(1,-i,0),(0,i,1)\}\rangle$$

(ii) Analogamente,

$$
\begin{aligned}
v \in \left(\mathbb{C}^3\right)_{-1} &\iff v = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \wedge \begin{array}{rcrcrcr|} -x & + & iy & + & z & = & -x\\ ix & + & y & - & iz & = & -y\\ x & - & iy & - & z & = & -z \\ \hline \end{array}\\
&\iff v \in \langle\{(i,1,-i)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\left(\mathbb{C}^3\right)_{-1} = \langle\{(i,1,-i)\}\rangle$$

Así, la base de diagonalización es

$$\alpha = \{(1,-i,0),(0,i,1),(i,1,-i)\}$$

Teorema 8.0.18. *(Operadores adjuntos)*

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano y $T_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad (i=1,2)$ entonces

(1) $(T^\star)^\star = T$
(2) $(T+L)^\star = T^\star + L^\star$
(3) $(\lambda T)^\star = \overline{\lambda} T^\star$
(4) $(TL)^\star = (L)^\star (T)^\star$

En efecto.
Probaremos, $(TL)^\star = (L)^\star(T)^\star$, las otras quedan como ejercicios.

$$\begin{aligned}(TL)^\star &= \overline{TL}^t \qquad \textit{ver} \text{ (265)}\\ &= \overline{L}^t\overline{T}^t\\ &= (L)^\star(T)^\star\end{aligned}$$

Observación 8.0.19.

En lo que sigue intentaremos determinar relaciones entre T y $T^\star$, para ello implementaremos una serie de resultados pequeños, pero importantes.

Escolio 8.0.20.

Si $(\widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)}) = \{T^\star \,|\, T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)\}$ *entonces* $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \cong (\widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)})$ *En efecto*
Si defines canonicamente, la siguiente transformación:

$$\Lambda : \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \longmapsto (\widehat{\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)}) \quad \textit{tal que} \quad \Lambda(T) = T^\star$$

entonces

(i) *De* (8.0.18), *sigue que* $\Lambda \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$, *es decir,* Λ *es una transformación lineal.*
(ii)

$$\begin{aligned}T \in \ Ker(\Lambda) &\iff T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad \wedge \quad \Lambda(T) = 0\\ &\iff T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad \wedge \quad T^\star = 0\\ &\iff T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad \wedge \quad \overline{T}^t = 0\\ &\iff T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad \wedge \quad \overline{T} = 0\\ &\iff T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V) \quad \wedge \quad T = 0\end{aligned}$$

Así $\Lambda \in \mathbb{A}ut_{\mathbb{K}}(V)$

Escolio 8.0.21.

(266) $$T \in \mathbb{A}ut_{\mathbb{K}}(V) \implies T^\star \in \mathbb{A}ut_{\mathbb{K}}(V)$$

En efecto

$$\begin{aligned}\det T^\star &= \det \overline{T}^t\\ &= \det \overline{T^t}\\ &= \det \overline{T}\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Escolio 8.0.22.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial Prehilbertiano, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V))$ y $W \leq V$ entonces

$$T(W) \subset W \implies T^\star(W^\perp) \subset W^\perp$$

En efecto
Por demostrar que: $v \in W^{\perp} \Longrightarrow T^{\star}(v) \in W^{\perp}$

$$\begin{aligned} v \in W^{\perp} &\iff v \in V \quad \wedge \quad \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)\\ &\Longrightarrow \langle v, T(w)\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)\\ &\Longrightarrow \langle T^{\star}(v), w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)\\ &\Longrightarrow T^{\star}(W^{\perp}) \subset W^{\perp}\end{aligned}$$

Escolio 8.0.23.

Sea V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial Prehilbertiano y* $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V))$ *entonces*

$$T \text{ diagonalizable} \quad \Longrightarrow \quad T \circ T^{\star} = T^{\star} \circ T \tag{267}$$

En efecto
Supongamos que T *es diagonalizable entonces existe una base ortonormal* α *de vectores propios de* V *tal que*

- $[T]_{\alpha}^{\alpha} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\} \Longrightarrow [T^{\star}]_{\alpha}^{\alpha} = diag\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_s\}$
- *En particular,* $T \circ T^{\star} = T^{\star} \circ T$

Definición 8.0.24.

Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$ *entonces diremos que* T *es un operador normal si* $T \circ T^{\star} = T^{\star} \circ T$

Ejemplo 8.0.25.

Sea $(V, \langle,\rangle)$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$. Sea $T = T^{\star}$ entonces claramente T es normal y valen las siguientes propiedades.

(1) $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

En efecto, el resultado sigue de la definición de adjunto.

(2) Si λ es valor propio de T entonces $\lambda \in \mathbb{R}$

En efecto, el resultado sigue de (8.0.23)

(3) Sean λ_1 y λ_2 valores propios de T y V_{λ_1} y V_{λ_1} los correspondientes subespacios propios entonces

$$u \in V_{\lambda_1}; v \in V_{\lambda_2} \wedge \lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2 \quad \Longrightarrow \quad \langle u, v\rangle = 0 \tag{268}$$

En efecto

La idea es componer correctamente la siguiente información

(i) $u \in V_{\lambda_1} \Longleftrightarrow u \in V \wedge T(u) = \lambda_1 u$
(ii) $v \in V_{\lambda_2} \Longleftrightarrow v \in V \wedge T(v) = \lambda_2 v$
(iii) $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

Entonces compongamos

$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle &\iff \langle \lambda_1 u, v\rangle = \langle u, \lambda_2 v\rangle\\ &\iff \lambda_1 \langle u, v\rangle = \bar{\lambda}_2 \langle u, v\rangle\\ &\iff (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \langle u, v\rangle = 0_V\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$ entonces $\langle u, v\rangle = 0$

(4) T posee un valor propio (no nulo!!).

En efecto

Sea α una base ortonormal de V entonces

$$T = T^{\star} \Longrightarrow [T]_{\alpha}^{\alpha} = ([T]_{\alpha}^{\alpha})^{\star}$$

Ahora, el polinomio característico $P_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - [T]_{\alpha}^{\alpha}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}[\lambda]$ y luego, posee una raíz λ en $\mathbb{C}$ y de (2.) sigue que $\lambda \in \mathbb{R}$.

(5) Existe una base ortonormal, formada por vectores propios de T, esto es, T es diagonalizable

En efecto
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de T, que existe por la propiedad (d) y sea $v \in V$ su correspondiente vector propio, es decir, $T(v) = \lambda v$. Sea $u_1 = \frac{v}{||v||}$ entonces $T(u_1) = \lambda u_1$ y $\|u_1\| = 1$
Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$ entonces V posee una base ortonormal de vectores propios de T y en particular T es diagonalizable.
Hagamos Inducción Matemática!!! (sirve y mucho esta técnica) sobre $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$, y para ello consideremos la siguiente Hipótesis de inducción.
H : Si $(U, \langle,\rangle) \leq (V, \langle,\rangle)$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n-1$ entonces U posee una base ortonormal de vectores propios de T. Etapas básicas:

(a) Si $W = \langle\{u_1\}\rangle$ entonces $V = W \oplus W^{\perp}$
(b) De (8.0.22), tenemos que

$$T(W) \subset W \Longrightarrow T^{\star}KB(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$$

(c) T autoadjunto $\Longleftrightarrow T = T^{\star}$, luego $T(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$, esto permite definir la transformación lineal restricción de T. es decir:

$$\begin{aligned} \widehat{T} = T|_{W^{\perp}} \quad : W^{\perp} &\longmapsto \quad W^{\perp} \\ v \quad &\longmapsto \quad \widehat{T}(v) = T(v) \end{aligned}$$

(d) Como $dim_{\mathbb{K}}(W^{\perp}) = n-1 < n$ entonces la hipótesis de Inducción H aplica y así $W^{\perp}$ posee una base ortonormal de vectores propios de $\widehat{T}$, digamos $\beta = \{u_2, u_3, \dots, u_n\}$ y finalmente de $V = W \oplus W^{\perp}$, sigue que $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de T.

Definición 8.0.26.

Sea $(V, \langle,\rangle)$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V)$. T será llamado un operador autoadjunto o hermitiano si $T = T^{\star}$

Observación 8.0.27.

- Diremos que T es autoadjunto si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que T es hermitiano si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Así,

T autoadjunto $\Longleftrightarrow$ existe una base ortonormal α tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ es una matriz simétrica

CAPITULO 5

Preliminares sobre Formas

El objetivo central de este capitulo es caracterizar cónicas y cuádricas, usando esencialmente técnicas de Algebra Lineal.

1. Formas Líneales

Motivación 1.0.28.

Consideremos una vez más la situación central del Algebra Lineal, es decir.

Dado un $\mathbb{K}$ *espacio vectorial* V *y una base* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *de* V *entonces todo vector* $v \in V$ *puede ser reescrito de forma única com combinación lineal de los elementos de la base* α*, en símbolos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad a_i \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{269}$$

Así que el problema vuelve a ser como determino las coordenadas del vector v *que me interesa ubicar, la técnica que introduce un producto interno en* V*, ya nos dió una respuesta, pero queremos aquí desarrollar una técnica alternativa e independiente de la del producto interno.*

Partamos examinando lo básico, siempre da resultado,

$$[v_1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad [v_2]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots [v_n]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{270}$$

entonces el lector de coordenadas de los v_i, lee un 1 en la posición y 0 en las otras posiciones.
En el caso general,

$$[v]_\alpha = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{271}$$

De (271) vemos que cada $v \in V$ *necesita* n *lectores, pues dicho lector cuando menos debe ser lineal y entregar como valor un escalar, así que la idea ya está.*

Definición 1.0.29.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V entonces llamaremos α-lector al conjunto $\alpha^\star = \{v_1^\star, v_2^\star, \dots, v_n^\star\}$, donde para cada $i = 1, 2 \dots, n$

$$v_i^\star \quad : \quad \begin{array}{rcl} V & \longmapsto & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & a_i \end{array} \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{272}$$

En particular vale siguiente propiedad para los $\alpha - lectores$

$$v_i^\star(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Lema 1.0.30.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $v_i^\star$ es una transformación lineal del espacio vectorial V en su cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. En símbolos, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $v_i^\star \in \mathbb{L}_\mathbb{K}(V)$, equivalentemente $\alpha^\star \subset \mathbb{L}_\mathbb{K}(V, \mathbb{K})$

En efecto

Si $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ y $u = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ entonces

$$\begin{aligned} v_s^\star(v + u) &= v_s^\star \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) v_i \right] \\ &= a_s + b_s \\ &= v_s^\star(v) + v_s^\star(u) \end{aligned}$$

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\begin{aligned} v_s^\star(\lambda\, v) &= v_s^\star \left[\sum_{i=1}^n (\lambda\, a_i) v_i \right] \\ &= \lambda\, a_s \\ &= \lambda\, v_s^\star(v) \end{aligned}$$

Corolario 1.0.31.

$\alpha^\star$ es una base del espacio vectorial, $\mathbb{L}_\mathbb{K}(V, \mathbb{K})$

En efecto

(i) $\alpha^\star$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{L}_\mathbb{K}(V, \mathbb{K})$

Sea $T \in \mathbb{L}_\mathbb{K}(V, \mathbb{K})$ entonces

$$\begin{array}{lcll} v = \sum_{i=1}^n a_i v_i & \Longrightarrow & T(v) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) & T \text{ es lineal} \\ a_i = v_i^\star(v) & \Longrightarrow & T(v) = \sum_{i=1}^n v_i^\star(v) T(v_i) & \text{ver (1.0.29)} \end{array}$$

Así que;

$$T(v) = \sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^\star(v) = \left[\sum_{i=1}^n T(v_i) v_i^\star \right] (v)$$

Aplicando la definición de igualdad de funciones tenemos que;

$$T = \sum_{i=1}^n \underbrace{T(v_i)}_{\in \mathbb{K}} v_i^\star$$

o equivalentemente,

$$T \in \langle \{v_1^\star, v_2^\star, \ldots, v_n^\star\}\rangle$$

(ii) $\alpha^\star$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

En efecto

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i v_i^\star = 0$ entonces lo que dices es que, para cada $v \in V$ esa función en v es nula ó núcleo $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i v_i^\star\right) = \{o_V\}$.

El punto, es como usas esa información para concluir que los r_j son todos nulos, porque eso es lo que hay que mostrar. Para ello observa lo siguiente, si esa función anula todo el espacio, en particular anula a los básicos v_j, Así que vale para cada $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} r_i v_i^\star(v_j) \\ &= r_j \qquad\qquad \text{ver (1.0.29)} \end{aligned}$$

Conclusión, $\alpha^\star$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ y procederemos a darle los nombres que usualmente se usan para estos conceptos.

Definición 1.0.32.

$V^\star = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, se llama " Espacio Dual " del espacio vectorial V ". Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es una base de vectores de V entonces $\alpha^\star = \{v_1^\star, v_2^\star, \ldots, v_n^\star\}$ se llama " Base Dual " de la base α.

Conclusión 1.0.33.

Si V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_v\}$ una base de V entonces

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i^\star(v) v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{pmatrix} v_1^\star(v) \\ v_2^\star(v) \\ \vdots \\ v_n^\star(v) \end{pmatrix} \tag{273}$$

1.1. Ejercicios Resueltos.

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_v\}$ una base de V. Determinemos su base dual $\alpha^\star$.

Etapa 1 Determinamos $[v]_\alpha$, para un $v \in V$, genérico, digamos

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Etapa 2 Define $v_i^\star(v) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

Etapa 3 Sea $\alpha^\star = \{v_1^\star, v_2^\star, \dots, v_n^\star\}$

(2) Sea $\alpha = \{(1,2),(2,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ entonces usando por ejemplo el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$ para encontrar las coordenadas tenemos que;

$$(x,y) = \frac{x+2y}{5}(1,2) + \frac{2x-y}{5}(2,-1)$$

Luego, la base dual $\alpha^\star = \{(1,2)^\star, (2,-1)^\star\}$, se define como en (1)

$$(1,2)^\star(x,y) = \frac{x+2y}{5} \qquad (2,-1)^\star(x,y) = \frac{2x-y}{5}$$

Observen que, en particular

$$\begin{array}{ll} (1,2)^\star(1,2) = 1 & \qquad (1,2)^\star(2,-1) = 0 \\ (2,-1)^\star(1,2) = 0 & \qquad (2,-1)^\star(2,-1) = 1 \end{array}$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial no nulo, y sea $\phi \in \mathbb{V}^\star$. Demuestre que $\phi = 0$ o ϕ es sobreyectiva.

En efecto

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1 \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) \leq 1 \Longrightarrow dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = 0 \quad \vee \quad dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) = 1$$

Luego tenemos dos casos:

$$\begin{array}{rcl} \phi \neq 0 & \Longrightarrow & dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = 1 \\ & \Longrightarrow & dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi) = 1 dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) \\ & \Longrightarrow & \phi \text{ sobreyectiva} \end{array}$$

O bien

$$\begin{array}{rcl} dim_{\mathbb{K}}(Img(\phi)) = 0 & \Longrightarrow & dim_{\mathbb{K}}(ker(\phi)) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) \\ & \Longrightarrow & \phi(v) = 0 \quad (\forall v; v \in \mathbb{V}) \\ & \Longrightarrow & \phi = 0 \end{array}$$

(4) Dados tres números reales distintos, r_1, r_2 y r_3, podemos definir tres funciones como sigue:

$$\begin{array}{rcccl} T_i & : & \mathbb{R}_2[x] & \longmapsto & \mathbb{R} \qquad (i = 1,2,3) \\ & & p(x) & \longmapsto & p(r_i) \end{array} \tag{274}$$

entonces

- $T_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ para $(i = 1,2,3)$
En efecto

Sea $p(x) \in \mathbb{R}_2[x], q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} T_i(p(x)+q(x)) & = & p(r_i) + q(r_i) \\ & = & T_i(p(x)) + T_i(q(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T_i(\lambda p(x)) & = & \lambda p(r_i) \\ & = & \lambda T_i(p(x)) \end{array}$$

Luego, $T_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}) = (\mathbb{R}_2[x])^*$

- $\alpha^\star = \{T_1, T_2, T_3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $(\mathbb{R}_2[x])^*$

  En efecto

$$a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3 = 0 \Longrightarrow (a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3)(p(x)) = 0 \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

En particular

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(1) & = & 0 \\ (a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(x) & = & 0 \\ (a_1T_1 & + & a_2T_2 & + & a_3T_3)(x^2) & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0 \\ a_1r_1 & + & a_2r_2 & + & a_3r_3 & = & 0 \\ a_1r_1^2 & + & a_2r_2^2 & + & a_3r_3^2 & = & 0 \end{array}\right|$$

Pero, como

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0 \\ a_1r_1 & + & a_2r_2 & + & a_3r_3 & = & 0 \\ a_1r_1^2 & + & a_2r_2^2 & + & a_3r_3^2 & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y el determinante de la matriz A es un determinante de Vandermonde entonces

$$\det(A) = (r_1 - r_2)(r_2 - r_3)(r_3 - r_1)$$

Y como por hipótesis los números son distintos entonces $\det(A) \neq 0$ y la solución del sistema es trivial, es decir $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

- $\alpha^\star = \{T_1, T_2, T_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$

  En efecto

  $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])^* = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, así que $\alpha^\star$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$

- Determinemos la correspondiente base α de $\mathbb{R}_2[x]$

  Supongamos que $\alpha = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es la base buscada, donde:

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i1}x^i \tag{275}$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i2}x^i \tag{276}$$

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{2} c_{i3}x^i \tag{277}$$

(278)

entonces por la propia definición de base dual, debemos tener:

Para T_1

$$\begin{array}{rcl} T_1(p_1(x)) & = & 1 \\ T_1(p_2(x)) & = & 0 \\ T_1(p_3(x)) & = & 0 \end{array} \text{ y luego } \begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_1 & + & c_{21}r_1^2 & = & 1 \\ c_{02} & + & c_{12}r_1 & + & c_{22}r_1^2 & = & 0 \\ c_{03} & + & c_{13}r_1 & + & c_{23}r_1^2 & = & 0 \end{array}$$

Para T_2

$$\begin{array}{rcl} T_2(p_1(x)) & = & 0 \\ T_2(p_2(x)) & = & 1 \\ T_2(p_3(x)) & = & 0 \end{array} \text{ y luego } \begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_2 & + & c_{21}r_2^2 & = & 0 \\ c_{02} & + & c_{12}r_2 & + & c_{22}r_2^2 & = & 1 \\ c_{03} & + & c_{13}r_2 & + & c_{23}r_2^2 & = & 0 \end{array}$$

Para T_3

$$\begin{array}{rcl} T_3(p_1(x)) & = & 0 \\ T_3(p_2(x)) & = & 0 \\ T_3(p_3(x)) & = & 1 \end{array} \text{ y luego } \begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_3 & + & c_{21}r_3^2 & = & 0 \\ c_{02} & + & c_{12}r_3 & + & c_{22}r_3^2 & = & 0 \\ c_{03} & + & c_{13}r_3 & + & c_{23}r_3^2 & = & 1 \end{array}$$

Así que para cada polinomio tenemos:

Para (276)

$$\left.\begin{array}{ccccccc} c_{01} & + & c_{11}r_1 & + & c_{21}r_1^2 & = & 1 \\ c_{01} & + & c_{11}r_2 & + & c_{21}r_2^2 & = & 0 \\ c_{01} & + & c_{11}r_3 & + & c_{21}r_3^2 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc} c_{11}(r_1-r_2) & + & c_{21}(r_1^2-r_2^2) & = & 1 \\ c_{11}(r_2-r_3) & + & c_{21}(r_2^2-r_3^2) & = & 0 \end{array}\right|$$

entonces

$$\left.\begin{array}{ccccc} c_{11} & + & c_{21}(r_1+r_2) & = & \frac{1}{r_1-r_2} \\ c_{11} & + & c_{21}(r_2+r_3) & = & 0 \end{array}\right|$$

Luego,

$$c_{21} = \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$$

Cálculos analogos permiten mostrar que:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-r_2)(x-r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \\ p_2(x) &= \frac{(x-r_1)(x-r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} \\ p_3(x) &= \frac{(x-r_1)(x-r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)} \end{aligned}$$

2. Ejercicios Propuestos

(1) Demuestre que V es isomorfo a $V^\star$

(2) Sea $\alpha = \{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-2)}_{v_2}, \underbrace{(-1,-1,0)}_{v_3}\} \subset \mathbb{R}^3$.

- Determine $\phi \in (R^3)^*$ tal que

$$\phi(v_1) = 1, \qquad \phi(v_2) = -1 \qquad \phi(v_3) = 3$$

- Determine $\phi \in (R^3)^*$ tal que

$$ker(\phi) = \langle \{v_1, v_2\} \rangle \quad \wedge \quad v_3 \notin ker(\phi)$$

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una base de V y $\beta^\star = \{(v_1+v_2)^\star, (v_1-v_2)^\star\}$.

Demuestre que

$$(v_1+v_2)^\star \neq v_1^\star + v_2^\star$$

(4) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, un subconjunto de V tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} i v_i$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Determine $\beta^\star$

(5) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base de V y $\beta = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j v_j$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

(i) Determine $\beta^\star$

(ii) Determine $[v_j^*]_{\beta^\star}$, para $j = 1, 2, \dots, n$

(iii) Determine $[w_j^\star]_\alpha^1$

(6) Sea $\alpha^* = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subset (\mathbb{R}_2[x])^*$ tal que para cada elemento

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(p(x)) &= \int_0^1 p(x)\,dx \\
\phi_2(p(x)) &= \int_0^2 p(x)\,dx \\
\phi_3(p(x)) &= \int_0^{-1} p(x)\,dx
\end{aligned}$$

- Demuestre que α^* es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$.
- Determine la correspondiente base α de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Preliminares sobre Formas Bilíneales

Motivación 3.0.1.

Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y supongamos que V, posee un producto interno $\langle , \rangle$ entonces observamos lo siguiente:

(i) *El producto interno es una función tal que:*

$$(u,v) \in V \times V \xrightarrow{\langle , \rangle} \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$$

(ii) *Para cada $v \in V$ la función $\langle , v\rangle \in V^\star$, si definimos:*

$$u \in V \xrightarrow{\langle , v\rangle} \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$$

(iii) *Para cada* $u \in V$ *la función* $\langle u, \rangle \in V^\star$*, si definimos:*

$$v \in V \stackrel{\langle u, \rangle}{\longmapsto} \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$$

(iv) *Supongamos que* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$*, es una base de* V *entonces la " linealidad de ambas coordenadas se exprime (o usa) de la siguiente forma para;* $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ *y* $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$*:*

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle\\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle\end{aligned}$$

equivalentemente, si interpretas $(\langle v_i, v_j\rangle) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ *entonces*

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix} (\langle v_i, v_j\rangle) \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\\ &= [u]_\alpha^t \underbrace{(\langle v_i, v_j\rangle)}_{[\langle,\rangle]_\alpha^\alpha} [v]_\alpha\end{aligned}$$

En particular,

(a) *Si* α *es una base ortonormal entonces*

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\\ &= [u]_\alpha^t\ [v]_\alpha\\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i\end{aligned}$$

(b) *Si* $u = v$ *y* α *es una base ortonormal entonces*

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

(c) *En general, si* $[\langle, \rangle]_\alpha^\alpha$ *es diagonalizable y* β *es la base ortonormal de vectores propios de* $\langle, \rangle$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\langle u,v\rangle &= [u]_\alpha^t\,[I]_\beta^\alpha \underbrace{(\langle v_i,v_j\rangle)}_{[\langle,\rangle]_\beta^\beta}[I]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha\\
&= [u]_\alpha^t\,[[I]_\alpha^\beta]^t \underbrace{(\langle v_i,v_j\rangle)}_{[\langle,\rangle]_\beta^\beta}[I]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha\\
&= [[I]_\alpha^\beta[u]_\alpha]^t\ \underbrace{(\langle v_i,v_j\rangle)}_{[\langle,\rangle]_\beta^\beta}[I]_\alpha^\beta\,[v]_\alpha\\
&= [u]_\beta^t\ \underbrace{(\langle v_i,v_j\rangle)}_{[\langle,\rangle]_\beta^\beta}[v]_\beta\\
&= [u]_\beta^t\ diag\ \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\ [v]_\beta
\end{aligned}
$$

(d) *En particular, si $\beta=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ entonces*

$$\langle u,u\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_i\langle u,w_i\rangle^2$$

Definición 3.0.2.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $B:V\times V\longmapsto\mathbb{K}$ una función tal que $(u,v)\in V\times V\longmapsto B(u,v)\in\mathbb{K}$. Diremos que B es una forma bilineal si B es lineal en cada coordenada, esto es, para cada $v\in V$, $B_v\in V^\star$, donde $B_v(u)=B(u,v)$ y para cada $u\in V$, $B_u\in V^\star$, donde $B_u(v)=B(v,u)$

Observación 3.0.3.

Antes de dar ningún ejemplo, explicitemos los beneficios por ahora teóricos de la bilinealidad, algo ya hablamos de esto en la motivación.

Si $\alpha=\{v_1,\dots,v_n\}$ es una base de V entonces

$$
\begin{aligned}
B(u,v) &= B\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i,\sum_{j=1}^n b_jv_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_ib_jB(v_i,v_j)\\
&= \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}B(v_i,v_j)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es decir, tenemos la igualdad fundamental (teoría y práctica)

$$B(u,v)=[u]_\alpha^t\ \underbrace{(\langle v_i,v_j\rangle)}_{[B]_\alpha^\alpha}[v]_\alpha \tag{279}$$

Esta observación vale por todos los ejemplos que quieras pues, ella permite hacer la siguiente identificación.

Teorema 3.0.4.

Si $B(V)=\{\text{Formas bilíniales de V }\}$ y dim $_{\mathbb{K}}(V)=n$ entonces $B(V)\cong\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ (son isomorfos)

En efecto

Basta definir la siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} B(V) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) \\ B & \longmapsto & \varphi(B) \end{array} \tag{280}$$

donde $\varphi(B) = (B(v_i, v_j))$ y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, es decir

$$(B(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & B(v_1, v_2) & \dots & B(v_1, v_n) \\ B(v_2, v_1) & B(v_2, v_2) & \dots & B(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & B(v_n, v_2) & \dots & B(v_n, v_n) \end{pmatrix} \tag{281}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & B(V) \\ A & \longmapsto & \varphi^{-1}(A) \end{array} \tag{282}$$

donde $\varphi^{-1}(A) = B_A$ y $B_A(u, v) = [u]_\alpha^t A[v]_\alpha$

Ahora basta comprobar que

(i) (280) y (282) son funciones inversas
(ii) (280) es una transformación lineal

Por una parte,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi^{-1}(A) &= \varphi(\varphi^{-1}(A)) \\ &= \varphi(B_A) \\ &= B_A(v_i, v_j) \\ &= [v_i]_\alpha^t A[v_j]_\alpha \\ &= A \qquad \text{maravilloso} \end{aligned}$$

Por otra,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ \varphi(B) &= \varphi^{-1}(\varphi(B)) \\ &= \varphi^{-1}(B(v_i, v_j)) \\ &= B_{B(v_i, v_j)} \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} B_{B(v_i, v_j)}(u, v) &= [u]_\alpha^t B(v_i, v_j)[v]_\alpha \\ &= B(u, v) \end{aligned}$$

Así que φ es una biyección.

Finalmente

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda B_1 + B_2) &= [\lambda B_1 + B_2](v_i, v_j) \\ &= \lambda B_1(v_1, v_j) + B_2(v_i, v_j) \\ &= \lambda \varphi(B_1) + \varphi(B_2) \end{aligned}$$

Es el fin, de la construcción de ejemplos.

Ejemplo 3.0.5.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *entonces definimos*

$$\begin{aligned} B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+3y_1 & 2x_1+4y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1x_2+3y_1x_2+2x_1y_2+4y_1y_2 \end{aligned}$$

Definición 3.0.6.

Si $B \in B(V)$ *y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *es una base de* V *entonces* $[B]_\alpha^\alpha = (B(v_i, v_j))$*, será llamada la matriz de la forma bilineal respecto de la base* α*.*

Si para alguna base α, $B(v_i,v_j) = B(v_j,v_i)$ para $i = 1,\dots,n$ $j = 1,\dots,n$ entonces $[B]_\alpha^\alpha$ es una matriz simétrica y reciprocamente si $[B]_\alpha^\alpha$ es simétrica para alguna base α entonces $B(u,v) = B(v,u)$ para $u \in V$ y para $v \in V$. En tal caso diremos que B es una forma bilineal simétrica.

Ejemplo 3.0.7.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ *entonces en la base canónica tenemos*

$$\begin{aligned} B_A((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= [(x_1,y_1)]_{c(2)}^t \ [A]_{c(2)}^{c(2)} \ [(x_2,y_2)]_{c(2)} \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} B_A((x,y),(x,y)) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= [(x,y)]_{c(2)}^t \ [A]_{c(2)}^{c(2)} \ [(x,y)]_{c(2)} \\ &= x^2+4xy+5y^2 \end{aligned}$$

Sea $q(x,y) = B_A((x,y),(x,y))$ *entonces* $q(x,y) = x^2+4xy+5y^2$

Definición 3.0.8.

Sea $B \in B(V)$ *tal que* B *es simétrica entonces la función*

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{q}{\longmapsto} & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & q(u) \end{array}$$

tal que $q(u) = B(u,u)$*, será llamada forma cuadrática de* V*, inducida por* B*.*

Teorema 3.0.9. *Forma Normal*

Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y q una forma cuadrática sobre V entonces existe una base α ortonormal de V tal que $q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$, donde $[u]_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}^t$

En efecto

Consideraremos las siguientes etapas:

(1) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V entonces tenemos para cada $v \in V$, la representación

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \tag{283}$$

(2) Como q es una forma cuadrática entonces por definición, $q(v) = B(v, v)$, donde B es la forma bilineal de la cual proviene la forma q. Así que, usando (283) tenemos que

$$q(v) = [v]_\alpha^t [q]_\alpha^\alpha [v]_\alpha \tag{284}$$

o equivalentemente

$$q(v) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & \frac{B(v_1,v_2)}{2} & \dots & \frac{B(v_1,v_n)}{2} \\ \frac{B(v_1,v_2)}{2} & B(v_2, v_2) & \dots & \frac{B(v_2,v_n)}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B(v_1,v_n)}{2} & \frac{B(v_1,v_n)}{2} & \dots & B(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(3) Como $[q]_\alpha^\alpha$, es simétrica entonces es diagonalizable y entonces existe una base ortonormal de vectores propios, digamos $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_n\}$ tal que $[q]_\beta^\beta = \text{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Así que tenemos la ecuación fundamental

$$[q]_\alpha^\alpha = [I]_\beta^\alpha [q]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta \tag{285}$$

(4) Sustituyendo (285) en (284) tenemos que

$$q(v) = [v]_\alpha^t [I]_\beta^\alpha [q]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta [v]_\alpha \tag{286}$$

(5) Ahora el punto es, como las bases son ortonormales entonces tenemos la igualdad

$$[I]_\beta^\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^{-1} = ([I]_\alpha^\beta)^t \tag{287}$$

Aplicando (287) a (286 tenemos

$$\begin{aligned} q(v) &= [v]_\alpha^t ([I]_\alpha^\beta)^t [q]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta [v]_\alpha \\ &= ([I]_\alpha^\beta [v]_\alpha)^t [q]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta [v]_\alpha \\ &= [v]_\beta^t [q]_\beta^\beta [v]_\beta \\ &= \big(\langle v, w_1\rangle \dots \langle v, w_n\rangle\big) \,\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \begin{pmatrix} \langle v, w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v, w_i\rangle^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.0.10.

Define la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & q(x, y). \end{array} \tag{288}$$

tal que $q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$, *entonces siguiendo los pasos de la demostración del teorema* (3.0.9) *hacemos:*

(1) *Expresamos q, en forma matricial:*

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{289}$$

Observen que, (289) se escribe en la base canónica que es ortonormal respecto del producto interno usual, como:

$$q(x,y) = [(x,y)]_{c(2)}^t \, [q]_{c(2)}^{c(2)} \, [(x,y)]_{c(2)} \tag{290}$$

(2) *Ahora diagonalizamos* $[q]_{c(2)}^{c(2)}$;

Partimos con el polinomio característico de $[q]_{c(2)}^{c(2)}$

$$\begin{aligned} P_q(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 \\ 1 & (\lambda+1) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda^2-1)-1 \\ &= \lambda^2-2 \end{aligned}$$

Así que los valores propios son; $V.P{=}\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Seguimos con los subespacios propios de $[q]_{c(2)}^{c(2)}$.

$$\begin{aligned} v \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_\lambda &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \wedge [q]_{c(2)}^{c(2)} v = \lambda v \\ &\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & \lambda x \\ -x & - & y & = & \lambda y \end{array}\right| \qquad (\star) \end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = \sqrt{2}$

De $(\star)$ *sigue que:* $\left.\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & \sqrt{2}x \\ -x & - & y & = & \sqrt{2}y \end{array}\right|$. *Así que,* $y = (1-\sqrt{2})x$ *De donde,*

$$\begin{aligned} v \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\sqrt{2}} &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = \begin{pmatrix} x \\ \\ (1-\sqrt{2})x \end{pmatrix} \\ &\iff v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad \wedge \quad v = x \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \qquad x \in \mathbb{R} \\ &\iff (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{\sqrt{2}} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Caso 2. $\lambda = -\sqrt{2}$

De $(\star)$ *sigue que:*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -\sqrt{2}x \\ -x & - & y & = & -\sqrt{2}y \end{array}\right|. \text{ Así que, } y=(1+\sqrt{2})x \text{ De donde,}$$

$$\begin{aligned} v\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{-\sqrt{2}} &\iff v\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad\wedge\quad v=\begin{pmatrix} x \\ (1+\sqrt{2})x \end{pmatrix} \\ &\iff v\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \quad\wedge\quad v=x\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \qquad x\in\mathbb{R} \\ &\iff (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_{-\sqrt{2}}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}\right\}\right\rangle \end{aligned}$$

(3) *Construimos una base ortonormal de vectores propios, a partir de la base*

$$\beta=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}\right\}$$

Como β *es ortogonal entonces ortonormalizamos dividiendo por la norma de cada uno de ellos. Es decir*

$$\alpha=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}\right\}$$

(4) *Construimos* $[v]_\alpha$

$$\begin{aligned} v &= \left\langle\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{(1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \\ \frac{(1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{y(1-\sqrt{2})}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}+\left(\frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{y(1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) *Finalmente*

$$q(x,y) = \sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{y(1-\sqrt{2})}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2+(-\sqrt{2})\left(\frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{y(1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2$$

4. Clasificación de secciones Cónicas

Llamaremos sección cónica, al conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\} \tag{291}$$

y, ecuación general de la sección cónica a

$$C \ : \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \ \{a,b,c,d,e,f\} \subset \mathbb{R} \tag{292}$$

entonces (292), puede ser reescrita como:

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q(x,y)} + \underbrace{dx + ey}_{L(x,y)} + f = 0 \tag{293}$$

donde $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, es una forma cuadrática y $L(x,y) = dx + ey$ es una forma lineal.
Pasando a su forma matrical tenemos que (292) se reescribe como:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \tag{294}$$

Aplicamos ahora a (294), el teorema (3.0.9) y obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \langle v_2, e_1 \rangle \\ \langle v_1, e_2 \rangle & \langle v_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}}_{[I]_{\alpha}^{c(2)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f = 0$$

Donde, λ_1 y λ_2, son valores propios de "q", $\alpha = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1)$ una base ortonormal de vectores propios de q y $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \langle v_1, e_2 \rangle \\ \langle v_2, e_1 \rangle & \langle v_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}}_{[I]_{c(2)}^{\alpha}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Así que después de las transformaciones hechas en la ecuación de la sección cónica tenemos la ecuación central

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + f = 0 \tag{295}$$

donde $\begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \langle v_2, e_1 \rangle \\ \langle v_1, e_2 \rangle & \langle v_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}$

Caso: $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

En este caso, completamos cuadrados en (295) para obtener

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{D}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{D^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{D}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda_2} + f = 0 \tag{296}$$

Sea $x_2 = x_1 + \frac{D}{2\lambda_1}$; $y_2 = y_1 + \frac{D}{2\lambda_2}$ y $F = f - \frac{D^2}{4\lambda_1} - \frac{E^2}{4\lambda_2}$.

Luego tenemos,

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0 \tag{297}$$

Caso: $\star$ $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$

- $F > 0$ entonces C: $\emptyset$
- $F = 0$ entonces C: $\left(-\frac{D}{2\lambda_1}, -\frac{E}{2\lambda_2}\right)$
- $F < 0$ entonces C: $\dfrac{x_2^2}{-\frac{F}{\lambda_1}} + \dfrac{y_2^2}{-\frac{E}{\lambda_2}} = 1$ es una Elipse.

Caso: $\star$ $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$

- $F = 0$ entonces C: $y_2 = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x_2$ par de rectas concurrentes.
- $F \neq 0$ entonces C: $\dfrac{x_2^2}{-\frac{F}{\lambda_1}} + \dfrac{y_2^2}{-\frac{E}{\lambda_2}} = 1$ es una hipérbola.

Conclusión 4.0.11.

$$\begin{cases} (i)\ \lambda_1\lambda_2 > 0 \Longrightarrow C : \begin{cases} \emptyset \\ Punto \\ Elipse \end{cases} \\ \\ (ii)\ \lambda_1\lambda_2 < 0 \Longrightarrow C : \begin{cases} par\ de\ rectas\ concurrentes \\ Hiperbola \end{cases} \end{cases}$$

Caso: $\lambda_1\lambda_2 = 0$

Caso: $\star$ $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$

$$Dx_1 + Ey_1 + f = 0 \text{ es una recta}$$

Caso: $\star$ $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{E}{2\lambda_2}\right)^2 + Dx_1 - \frac{E^2}{4\lambda_2} + f = 0$$

Si $y_2 = y_1 + \frac{E}{2\lambda_2}$ y $F = f - \frac{E^2}{4\lambda_2}$ entonces

$$\lambda_2 y_2^2 + Dx_1 + F = 0 \text{ parábola o sus degeneraciones}$$

Conclusión 4.0.12.

$$\lambda_1\lambda_2 = 0 \Longrightarrow C : \begin{cases} Parábola \\ Una\ recta \\ Par\ de\ rectas\ paralelas \\ \emptyset \end{cases}$$

Observación 4.0.13.

Sabemos que $[q]_{c(2)}^{c(2)} = [I]_{\alpha}^{c(2)}\,[q]_{\alpha}^{\alpha}\,[I]_{c(2)}^{\alpha}$.

De donde sigue que $\det [q]_{c(2)}^{c(2)} = \det [q]_{\alpha}^{\alpha}$ Es decir,

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{b^2-4ac}{4}$$

Teorema 4.0.14.

Si C*:* $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ *es una sección cónica entonces*

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \textit{Hipérbola} \\ \textit{Par de rectas} \end{cases} \\ \\ b^2-4ac<0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \emptyset \\ \textit{Punto} \\ \textit{Elipse} \end{cases} \\ \\ b^2-4ac=0 \Longrightarrow C: \begin{cases} \textit{Parábola} \\ \textit{Una Recta} \\ \emptyset \\ \textit{Par de Rectas} \end{cases} \end{cases}$$

4.1. Ejercicio Resuelto.

Dada la sección cónica

$$C: \quad 5x^2-6xy+5y^2-24\sqrt{2}\,x+8\sqrt{2}\,y+56=0 \tag{298}$$

- Identifiquemos el tipo de cónica
- Tracemos la gráfica de (298)

Etapa 1. <u>Identificación</u>

Como,

$$b^2-4\cdot a\cdot c = (-6)^2-4\cdot 5\cdot 5<0$$

entonces usando el teorema (4.0.14) podemos concluir que (298) es una elipse o alguna de sus “degeneraciones. ”

Etapa 2. <u>Trazado de la cónica</u>

Algoritmo

Paso 1. Reinterpretación de C, como una suma de formas:

$$C: \quad q(x,y) + l(x,y) + 56 = 0$$

Donde,

$$q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 \qquad \text{forma cuadrática asociada a } C$$

$$l(x,y) = -24\sqrt{2}\, x + 8\sqrt{2}\, y \quad \text{forma lineal asociada a } C$$

Paso 2. Notación Matricial

Cada una de las formas puede ser representada en forma matricial en la base canónica $c(3)$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$, como sigue:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= [(x,y)]^t_{c(3)} \quad [q]^{c(3)}_{c(3)} \quad [(x,y)]_{c(3)} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} l(x,y) &= [(-24\sqrt{2}, 8\sqrt{2})]^t_{c(3)} \quad [(x,y)]_{c(3)} \\ &= \begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que, (298) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 56 = 0$$

Paso 3. Diagonalizamos $[q]^{c(3)}_{c(3)}$

Para ello calculamos en primer lugar los valores propios:

$$\begin{aligned} P_q(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} (\lambda-5) & 3 \\ 3 & (\lambda-5) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-5)^2 - 9 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 16 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-8) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $V.P = \{2, 8\}$

Para los vectores propios debemos resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & \lambda x \\ -3x & + & 5y & = & \lambda y \end{array} \quad (\star)$$

Así que para $\lambda = 2$, tenemos que $(\star)$ se reduce a:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 2x \\ -3x & + & 5y & = & 2y \end{array}\right| \Longrightarrow \quad x = y$$

Luego,

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{\lambda=2} \quad = \quad \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Análogamente para $\lambda = 8$, tenemos que $(\star)$ se reduce a:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 8x \\ -3x & + & 5y & = & 8y \end{array}\right| \Longrightarrow \quad x = -y$$

Luego,

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{\lambda=8} \quad = \quad \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Finalmente $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, es una base ortogonal, respecto del producto interno usual, de vectores propios.

Más aún

$$\alpha' \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Es una base ortonormal y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} &= [I]_{\alpha'}^{c(3)} \quad [q]_{\alpha'}^{\alpha'} \quad [I]_{c(3)}^{\alpha'} \\ &= ([I]_{c(3)}^{\alpha'})^t \quad [q]_{\alpha'}^{\alpha'} \quad ([I]_{c(3)}^{\alpha'}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 4. Reescribimos C en las nuevas coordenadas.

$$
\begin{aligned}
&q(x,y)+l(x,y)+f=0\\
&\Updownarrow\\
&\left[\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\\
&\begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+56=0\\
&\Updownarrow\\
&\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\\
&\begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+56=0\\
&\Updownarrow\\
&\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -16 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+56=0\\
&\Updownarrow\\
&2(x')^2+8(y')^2-16x'+32y'+56=0\\
&\Updownarrow\\
&(x')^2+4(y')^2-8x'+16y'+28=0
\end{aligned}
$$

Paso 5. Completamos cuadrados en C

$$
\begin{aligned}
&(x')^2+4(y')^2-8x'+16y'+28=0\\
&\Updownarrow\\
&((x')^2-8x')+4((y')^2+4y')+28=0\\
&\Updownarrow\\
&(x'-4)^2+4(y'+2)^2+28-32=0\\
&\Updownarrow\\
&(x'-4)^2+4(y'+2)^2=4\\
&\Updownarrow\\
&\frac{(x'-4)^2}{2^2}+\frac{(y'+2)^2}{1^2}=1
\end{aligned}
$$

Si hacemos

$$x''=x'-4 \qquad \wedge \qquad y''=y'+2 \tag{299}$$

entonces la elipse (299), se escribe como

$$\frac{(x'')^2}{2^2}+\frac{(y'')^2}{1^2}=1 \tag{300}$$

La cual es una elipse en posición canónica respecto de los ejes x'' y''

Paso 6. Dibujo de la Elipse

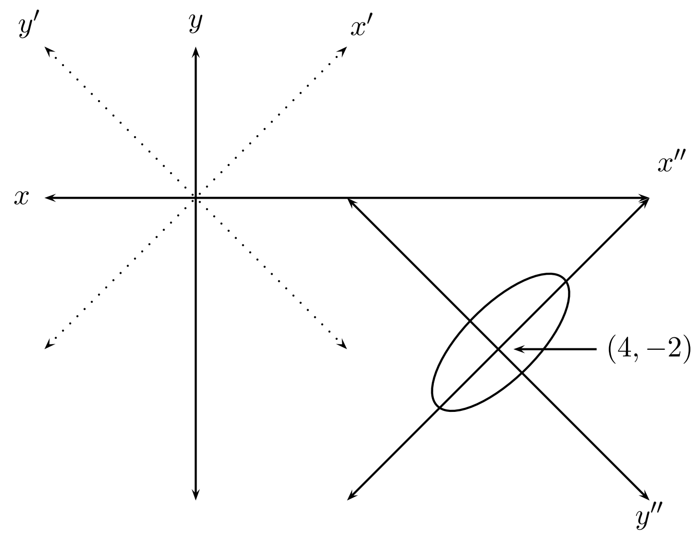

Figura 34: Elipse

4.2. Ejercicios Propuestos.

(1) En los siguientes ejercicios identifique la sección cónica

(a) $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 - 2y = 0$

(c) $25y^2 - 4x^2 = 100$

(d) $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

(e) $-25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$

(2) Identifique la cónica, escriba esta en forma canónica y grafique:

(a) $x^2 + xy + y^2 = 6$

(b) $xy = 1$

(c) $9x^2 + y^2 + 6xy = 4$

(d) $4x^2 + 4y^2 - 10xy = 0$

(e) $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$

(f) $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}\,x + 10\sqrt{10}\,y + 90 = 0$

(g) $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}\,x + 18\sqrt{2}\,y + 82 = 0$

(h) $5x^2 + 12xy - 2\sqrt{13}\, x = 36$

(i) $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}\, x - 31\sqrt{2}\, y + 70 = 0$

CAPITULO 6

Procesos Iterativos y algebra Lineal

Motivación 0.2.1.

(1) *Consideremos el sistema lineal canónico;*

$$\begin{array}{rcrcr|} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \\ \hline \end{array} \tag{301}$$

(2) *El sistema* (301), *puede ser escrito matricialmente como sigue*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} \tag{302}$$

Claramente la solución de (302) *es la matriz columna* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$*; pues*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(3) *El sistema* (303), *puede ser reescrito como:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \iff \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ & \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ & \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así que el sistema (303), *se escribe " en este caso " como:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{N}$$

(4) *Conclusión*

$$A \cdot X = B \iff X = M \cdot X + N \tag{303}$$

(5) *En la equivalencia (303), el sistema clásico $A \cdot X = B$ se transforma en un " proceso iterativo " o de " entrada y salida "; es decir podemos obtener una sucesión c_i, donde $c_i \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1)$, para $i = 1, 2$, como sigue:*

(i) *Si* $c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *entonces*

- $c_2 = Mc_1 + N$.

$$\begin{aligned} c_2 &= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $c_3 = M \cdot c_2 + N$

$$\begin{aligned} c_3 &= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.166 \\ -1.166 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $c_4 = M \cdot c_3 + N$

$$\begin{aligned} c_4 &= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{18} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.083 \\ -0.944 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $c_5 = M \cdot c_4 + n$

$$
\begin{aligned}
c_5 &= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ & \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{12} \\ \\ -\frac{17}{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{35}{36} \\ \\ -\frac{35}{36} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.972 \\ \\ -0.972 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(ii) *Iterando el proceso tenemos una sucesión* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

- $c_n = \begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ \\ a_2^{(n)} \end{bmatrix}$
- *si definimos* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_1^{(n)} \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_2^{(n)} \end{bmatrix}$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Procesos Iterativos

1.1. Objetivos Generales.

(1) Dado un sistema lineal del tipo $A \cdot X = B$, donde $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$, conseguir la siguiente equivalencia

$$A \cdot X = B \Longleftrightarrow X = M \cdot X + N; \qquad M \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), N \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1))$$

(2) Determinar condiciones necesarias y suficientes para que el proceso iterativo

$$X = M \cdot X + N$$

admita una solución aproximada a la solución real del sistema $A \cdot X = B$.

(3) Determinar con el máximo de precisión el error que se comete al obtener una solución aproximada del sistema original $A \cdot X = B$.

1.2. Lenguaje Básico.

(1) $A \cdot X = B$, donde $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$; será llamado Sistema Canónico.

- Ejemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{304}$$

(2) $X = M \cdot X + N; \qquad M \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), N \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1))$; será llamado Proceso Iterativo.

- Ejemplo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \tag{305}$$

(3) $\{B_s\}_{s\in\mathbb{N}} = \left(\left\{b_{ij}^{(s)}\right\}_{s\in\mathbb{N}}\right)$, será llamada una sucesión de matrices si para cada $s \in \mathbb{N}$, $B_s \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

- Es decir que;

$$B_s = \begin{bmatrix} b_{11}^{(s)} & b_{12}^{(s)} & \dots & b_{1n}^{(s)} \\ b_{21}^{(s)} & b_{22}^{(s)} & \dots & b_{2n}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}^{(s)} & b_{n2}^{(s)} & \dots & b_{nn}^{(s)} \end{bmatrix} \tag{306}$$

(4) Llamaremos Límite de una sucesión de matrices a $\lim\limits_{s\to\infty} \{B_s\}_{s\in\mathbb{N}} = \left(\lim\limits_{s\to\infty} \left\{b_{ij}^{(s)}\right\}_{s\in\mathbb{N}}\right)$

- Esto es;

$$\lim_{s\to\infty} B_s = \begin{bmatrix} \lim\limits_{s\to\infty} b_{11}^{(s)} & \lim\limits_{s\to\infty} b_{12}^{(s)} & \dots & \lim\limits_{s\to\infty} b_{1n}^{(s)} \\ \lim\limits_{s\to\infty} b_{21}^{(s)} & \lim\limits_{s\to\infty} b_{22}^{(s)} & \dots & \lim\limits_{s\to\infty} b_{2n}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lim\limits_{s\to\infty} b_{n1}^{(s)} & \lim\limits_{s\to\infty} b_{n2}^{(s)} & \dots & \lim\limits_{s\to\infty} b_{nn}^{(s)} \end{bmatrix} \tag{307}$$

1.3. Procesos Iterativos Clásicos.

Lema 1.3.1.

Dado el Sistema Canónico $A \cdot X = B$ existe un Proceso Iterativo asociado a dicho Sistema.

En efecto

(i) Sea $A = A + I - I$, donde $I = I_n$, representa la matriz identidad de tamño n
(ii) Sustituyendo en el Sistema clásico, tenemos

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\iff [(A-I)+I]\cdot X = B \\ &\iff X + (A-I)X = B \\ &\iff X = (I-A)X + B \end{aligned}$$

Lo que prueba la existencia de un proceso iterativo

Definición 1.3.2.

$X = MX + N$, donde $M = (I - A)$ y $N = B$ será llamado Proceso Iterativo Clásico de tamaño n, en símbolos ($Pic(n)$)

Observación 1.3.3.

Para estudiar un ($Pic(n)$) dado, adoptaremos la siguiente estrategia:

(1) *Iniciamos el proceso tomando $x_1 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ arbitrario:*

(2) *Partiendo con* x_1*, construimos una sucesión* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1)$ *como sigue:*

$$\begin{aligned} x_2 &= Mx_1 + N \\ x_3 &= Mx_2 + N = M(Mx_1+N)+N = M^2x_1 + (I+M)N \\ x_4 &= M^3x_1 + (I+M+M^2)N \\ \dots \end{aligned}$$

En general, para $s \geq 1$*, tenemos que*

(308) $$x_{s+1} = M^s x_1 + \left[\sum_{i=0}^{s-1} M^i\right] N, \ \ donde\ M^0 = I$$

(3) *Supongamos que la matriz* M *es diagonalizable entonces existe una base* α *de* $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1)$ *de vectores propios tal que*

(i) M *en esa base se representa como una matriz diagonal, digamos*

(309) $$[M]_\alpha^\alpha = diag\ \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

(ii) M *es similar a* $[M]_\alpha^\alpha$*, es decir*

(310) $$M = [M]_{c(n)}^{c(n)} = [I]_\alpha^{c(n)}\,[M]_\alpha^\alpha\,[I]_{c(n)}^\alpha$$

$$donde,\ c(n) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\}$$

(iii) *Como* $[I]_\alpha^{c(n)} = \left[[I]_{c(n)}^\alpha\right]^{-1}$ *entonces de (310), sigue que*

(311) $$M^r = [I]_\alpha^{c(n)}\,[[M]_\alpha^\alpha]^r\,[I]_{c(n)}^\alpha$$

(4) *Aplicando (311) en (308), tenemos que*

(312) $$x_{s+1} = [I]_\alpha^{c(n)}\,[[M]_\alpha^\alpha]^s\,[I]_{c(n)}^\alpha\,x_1 + \left[\sum_{i=0}^{s-1} M^i\right] N$$

(5) *Pero*

$$\begin{aligned} [[M]_\alpha^\alpha]^s &= [\ diag\ \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}]^s \\ &= diag\ \{\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_n^s\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} [[M]_\alpha^\alpha]^s &= \lim_{s\to\infty} diag\ \{\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_n^s\} \\ &= diag\ \{\lim_{s\to\infty}\lambda_1^s, \lim_{s\to\infty}\lambda_2^s, \dots, \lim_{s\to\infty}\lambda_n^s\} \end{aligned}$$

Así que la primera conclusión es archivada como el siguiente:

Teorema 1.3.4.

Si M *es diagonalizable entonces* $\lim_{s\to\infty} M^s = (0)$ *si y sólo si los valores propios de* M *tienen módulo menor que 1.*

En efecto

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} M^s &= P^{-1} \lim_{s\to\infty}\ diag\ \{\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_n^s\}P \\ &= P^{-1}\ diag\ \{\lim_{s\to\infty}\lambda_1^s, \lim_{s\to\infty}\lambda_2^s, \dots, \lim_{s\to\infty}\lambda_n^s\}P \end{aligned}$$

Y el resultado sigue del hecho que

$$\lim_{s\to\infty} a^s = 0 \iff |a| < 1$$

Una palabra para el caso general, existe un resultado analogo, pero debe usarse formas canónicas de Jordan. Aplicando (5) a (308) tenemos que

$$\lim_{s\to\infty} x_{s+1} = \lim_{s\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{s-2} M^i\right] N \tag{313}$$

(6) *Finalmente, como en (313),*

$$\left[\sum_{i=0}^{s-2} M^i\right](I-M) = I - M^{s-1} \tag{314}$$

entonces

$$\lim_{s\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{s-2} M^i\right](I-M) = I - \lim_{s\to\infty} M^{s-1} \tag{315}$$

Así que la segunda conclusión es archivada en el siguiente:

Teorema 1.3.5.

$\lim_{s\to\infty} M^s = (0)$ *si y sólo si* $I - M$ *es invertible y en tal caso,*

$$(I-M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} M^i \tag{316}$$

La conclusión final la archivamos en el siguiente

Teorema 1.3.6.

Dados un Pic(n) y $x_1 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1)$ *entonces existe una sucesión* $\{x_s\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times 1)$ *tal que*

(i) $x_{s+1} = M^s x_1 + \left[\sum_{i=0}^{s-1} M^i\right] N$, *donde* $M^0 = I$ *y* $s \geq 1$

(ii) *Si* $\lim_{s\to\infty} M^s = (0)$ *entonces* $\lim_{s\to\infty} x_{s+1} = (I-M)^{-1}N$ *es una solución de Pic(n).*
En efecto

$$\begin{aligned} X = MX + N &\iff X - MX = N \\ &\iff (I-M)X = N \\ &\iff X = (I-M)^{-1}N \end{aligned}$$

Definición 1.3.7.

Si $\lim_{s\to\infty} M^s = (0)$ *diremos que Pic(n) converge, caso contrario decimos que diverge.*

Si bien hemos conseguido una buena caracterización para que un Pic(n) converja, no obstante hay algunos problemas tales como

(i) *Si el tamaño del Pic(n) es grande, (es decir n es grande), entonces calcular el límite de las potencias de M o sus valores propios o su forma canónica de Jordan es costosa en tiempo.*

(ii) *Además de calcular los valores propios, estos deben tener su módulo menor que uno o equivalentemente la matriz A debe estar cerca de la identidad.*

1.4. Norma clásica para matrices. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ entonces identificando $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ (recuerde que la asociasión $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \longmapsto (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \in \mathbb{R}^n$, es un isomorfismo), podemos definir

$$\|A\| = \max \{|a_{11}|, |a_{21}|, \dots, |a_{n1}|\}$$

y en general, podemos definir una función como sigue:

$$\begin{array}{cccc} \| \ \| & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ & & A & \longmapsto & \|A\| \end{array} \tag{317}$$

tal que si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces

$$\|A\| = \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad | \quad 1 \le i \le n \right\} \tag{318}$$

Ejemplo 1.4.1.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \right\| = \text{máx} \{8, 33, 19\} = 33$$

Lema 1.4.2.

La función $\| \ \|$ es una norma en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$
En efecto

(i) Como $\|A\| = \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ / \ 1 \le i \le n \right\}$ entonces $\|A\| \ge 0$ y

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 \quad &\iff \quad \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \mid 1 \le i \le n \right\} = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \quad 1 \le i \le n \\ &\iff |a_{ij}| = 0 \quad 1 \le i \le n \quad 1 \le j \le n \\ &\iff a_{ij} = 0 \quad 1 \le i \le n \quad 1 \le j \le n \\ &\iff A = (0) \end{aligned}$$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda A\| &= \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda||a_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&= |\lambda| \ \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&= |\lambda| \ \|A\|
\end{aligned}$$

(iii) Para ver la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&\leq \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&\leq \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} + \ \text{máx} \ \left\{ \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \ / \ 1 \leq i \leq n \right\} \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

Lema 1.4.3.

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces

(319) $$\lim_{s \to \infty} \|A^s - A)\| = 0 \Longrightarrow \lim_{s \to \infty} A^s = A$$

En efecto

$$\lim_{s \to \infty} \|A^s - A\| = \lim_{s \to \infty} \ \text{máx} \ \left\{ \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}^{(s)} - a_{ij}| \mid 1 \leq i \leq n \right\} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{s \to \infty} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}^{(s)} - a_{ij}| = 0 \quad \wedge \quad 1 \leq i \leq n$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{s \to \infty} |b_{ij}^{(s)} - a_{ij}| = 0 \quad \wedge \quad 1 \leq i \leq n$$
$$\lim_{s \to \infty} b_{ij}^{(s)} = a_{ij} \quad \wedge \quad 1 \leq i \leq n$$

Lema 1.4.4.

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$
En efecto

Como $AB = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|A\,B\| &= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \mid 1 \le i \le n\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \mid 1 \le i \le n\right\} \\
&\le \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}| \mid 1 \le i \le n\right\} \\
&\le \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \mid 1 \le i \le n\right\} \\
&\le \text{máx}\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \mid 1 \le i \le n\right\} \\
&\le \text{máx}\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \mid 1 \le i \le n\right\} \text{máx}\left\{\sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \mid 1 \le j \le n\right\} \\
&\le \|A\|\,\|B\|
\end{aligned}
$$

Corolario 1.4.5.

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces $\|A^s\| \le \|A\|^s$
En efecto
Aplicando (1.4), tenemos que

$$\|A^s\| = \|A^{s-1}\,A\| \le \|A\|^{s-1}\|A\| = \|A\|^s$$

ahora podemos aplicar los resultados anteriores como sigue:

(1) Aplicando (1.4.5), tenemos que:

$$\|A^s\| \le \|A\|^s \Longrightarrow \lim_{s\to\infty} \|A^s\| \le \lim_{s\to\infty} \|A\|^s$$

(2) $\|A^s\| < 1$ entonces necesariamente $\lim_{s\to\infty} \|A\|^s = 0$

Luego,

$$\|A^s\| < 1 \quad\Longrightarrow\quad 0 < \lim_{s\to\infty} \|A^s\| \le \lim_{s\to\infty} \|A\|^s = 0$$

Así que

$$\|A^s\| < 1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{s\to\infty} \|A^s\| = 0 \tag{320}$$

(3) Finalmente aplicando (319) en (320), tenemos que

$$\|A^s\| < 1 \Longrightarrow \lim_{s\to\infty} A^s = 0 \tag{321}$$

Todo lo anterior, lo podemos reducir a la siguiente técnica.

Teorema 1.4.6.

Si $\|M\| < 1$ entonces Pic(n) converge a una solución.

Ejemplo 1.4.7.

En la motivación de este capítulo, estudiamos el sitema lineal (303)

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \end{array}\right|$$

Una vez que le damos la forma matricial, que llamamos Pic(2), tenemos que

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y $\|M\| = 5$ *no obstante en la motivación mostramos que podemos escribir* (303) *en el mismo formato* $X = MX + N$*, pero* M *y* N *son obtenidos de una forma no clásica y aún el sistema converge.*

Dos conclusiones podemos sacar del ejemplo anterior:

(i) La condición $\|M\| < 1$, es una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia del sistema.
(ii) Existen otras alternativas para generar procesos iterativos.

2. Procesos Iterativos no Clásicos

2.1. Proceso Iterativo de Jacobi.

Consideremos un sistema Lineal $A\ X = B$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ entonces

(1) Definimos a partir de la matriz A la nueva matriz

$$D_A = diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} \tag{322}$$

(2) De la misma forma a partir de la matriz A obtenemos la nueva matriz

$$ND_A = A - D_A \tag{323}$$

(3) Aplicando (322) y (323), podemos transformar al sistema original en lo siguiente:

$$\begin{aligned} A\ X = B \quad &\Longleftrightarrow \quad (D_A + ND_A)\ X = B \\ &\Longleftrightarrow \quad D_A\ X + ND_A\ X = B \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$A\ X = B \quad \Longleftrightarrow \quad D_A\ X = -ND_A\ X + B \tag{324}$$

(4) Para despejar X, debemos eliminar matematicamente a D_A en el primer miembro de (324) y para ello bastará que ocurra lo siguiente:

$$\text{Existe } D_A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \det D_A \neq 0$$

En este caso, podemos caracterizar la existencia de la inversa como sigue

$$\text{Existe } D_A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \tag{325}$$

(5) Si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$ entonces (324) puede ser escrito como sigue:

$$A\ X = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = \underbrace{-D_A^{-1}\ ND_A}_{M}\ X + \underbrace{D_A^{-1}\ B}_{N} \tag{326}$$

(6) Para que el método sea completo estudiemos más de cerca M y N.

$$\begin{aligned}
M &= -D_A^{-1}\, N D_A \\
&= -\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
N &= D_A^{-1}\, B \\
&= -\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(7) En resumen, aplicando los valores de M y N en (326), tenemos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \tag{327}$$

Definición 2.1.1.

Un proceso iterativo obtenido como en (327)*, se llama Proceso Iterativo de Jacobi de tamaño n, en símbolos Pij(n)*

Ejemplo 2.1.2.

Consideremos el sistema lineal expuesto en (303)

$$\begin{array}{rcrcr|} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \\ \hline \end{array}$$

En este caso, el Pij(n) obtenido es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{4}{3} \end{bmatrix}}_{N}$$

Observación 2.1.3.

Consideremos un *Pij(n)* entonces de la teoría expuesta anteriormente, más exactamente aplicando (1.4.6) tenemos que un *Pij(n)* converge si $\|M\| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|M\| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{máx} \left\{ \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \ \mid \ i = 1, 2, \dots, n \right\} < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii} \qquad \text{para } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

En estos términos, hemos probado el siguiente:

Teorema 2.1.4.

Un *Pij(n)* converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $a_{ii} \neq 0 \qquad i = 1, \dots, n$ y

(2) $\displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii} \qquad$ para $i = 1, \dots, n$

Ejemplo 2.1.5.

En el *Pij(2)* (303) tenemos que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

Luego, $a_{11} = 2 \neq 0$ y $a_{22} = -3 \neq 0$.

Luego el *Pij(2)* (303), converge a una solución del sistema clásico.

Observación 2.1.6.

Consideremos un Proceso Iterativo convergente entonces tenemos cuando menos los siguientes problemas:

(1) *Si Y es una solución absoluta del sistema de ecuaciones lineales AX=B entonces ¿ Cómo saber cúando la solución relativa obtenida es aceptable ?*

(2) *¿ Cómo medir el error que se comete en cualquiera de las etapas del cómputo del sistema iterativo ?*

Para responder a estas interrogantes comenzemos comparando lo que creemos es es problema; es decir supongamos que tenemos un proceso iterativo standar y Y es una solución absoluta del proceso entonces

(328) $$Y = M\,Y + N$$

y

(329) $$Y_{s+1} = M\,Y_s + N$$

Luego, de (328) y (329) obtenemos que

$$\begin{aligned} Y - Y_{s+1} &= MY - MY_s \\ Y - Y_{s+1} &= MY - MY_s + MY_{s+1} - MY_{s+1} \\ Y - MY &= Y_{s+1} - MY_{s+1} + MY_{s+1} - MY_s \\ Y(I - M) &= Y_{s+1}(I - M) + M(Y_{s+1} - Y_s \\ (Y - Y_{s+1})(I - M) &= M(Y_{s+1} - Y_s) \end{aligned}$$

Así que, como $\|M\| < 1$ entonces tenemos a nivel de matrices la igualdad fundamental

(330) $$Y - Y_{s+1} = M(Y_{s+1} - Y_s)(I - M)^{-1}$$

y a nivel de "números", tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \|Y - Y_{s+1}\| &= \|M\| \, \|(Y_{s+1} - Y_s)\| \, \|(I - M)^{-1}\| \\ &\leq \|(Y_{s+1} - Y_s)\| \, \|(I - M)\|^{-1} \end{aligned}$$

Finalmente la relación fundamental es dada por

(331) $$\|Y - Y_{s+1}\| \leq \frac{\|(Y_{s+1} - Y_s)\|}{\|(I - M)\|}$$

entonces tenemos el siguiente

Teorema 2.1.7.

Si $X = M\,X + N$ es un proceso iterativo de tamaño n con $\|M\| < 1$ entonces existe una sucesión $\{S_r\}_{r\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ tal que

(1) *S_1 es arbitrario (detonante del proceso)*
(2) *$S_{r+1} = M\,S_r + N$ para $r \geq 1$*
(3) *$\lim\limits_{r\to\infty} S_{r+1} = (I - M)^{-1}\,N$ es una solución del proceso iterativo y*
(4) $\|Y - Y_{s+1}\| \leq \dfrac{\|(Y_{s+1} - Y_s)\|}{\|(I - M)\|}$

2.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0,1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

(i) Calcule $||A||$
(ii) Considere ahora el sistema lineal

(332) $$\begin{bmatrix} 2 & 0,1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puede garantizar que el proceso iterativo $X = MX + N$ inducido por (332), con $M = I - A$ y $N = [3 \quad 0 \quad 1]^t$, converge a una solución del sistema original (332)

(2) De un ejemplo de una matriz de orden 2, tal que sus valores propios tengan módulo menor que 1, pero su norma sea mayor que 1.

(3) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -5x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & 7y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right|$$

Calcule X_3 a partir de $X_1 = [0 \quad 1 \quad 0]$, usando si es posible el método de Jacobi.

(4) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 2y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & 8y & + & 3z & = & -10 \\ x & + & 4y & + & 12z & = & 12 \end{array}\right|$$

(a) Calcule X_4 a partir de $X_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$, usando si es posible el método de Jacobi.

(b) Estime el error $||X_4 - X||$, donde X es la solución correcta del sistema.

(5) Consideremos un sistema $A\ X = B$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ entonces

(a) Definimos a partir de la matriz A la nueva matriz

$$TS_A = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

(b) De la misma forma a partir de la matriz A obtenemos la nueva matriz

(333) $$NTS_A = A - TS_A$$

(c) De condiciones para que a partir del sistema

$$TS_A\ X = -NTS_A\ X + B$$

Se obtenga un proceso iterativo convergente de la forma

(334) $$X = \underbrace{-TS_A^{-1}\ NTS_A}_{M}\ X + \underbrace{TS_A^{-1}\ B}_{N}$$

(d) Determine explícitamente M y N.
Un tal proceso se conoce como Proceso Iterativo de Gauss - Seidel de tamaño n, en símbolos Pig(n)

Contenidos

Bibliografía

[1] Bello, I. " Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Billeke, J. Bobadilla, G. " Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 1999.

[3] BiswaNath Datta, " Numerical Linear Algebra and Applications ", Brooks/Cole Publishing Company. 1994.

[4] Boldrini D, "Algebra Linear"

[5] Fraleigh J. "algebra Abstracta" Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[6] Grimaldi, R. " Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[7] Grossman, S. Álgebra lineal, Mc Graw Hill 1997.

[8] Gustafson, R. " Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[9] Hofmman K. and Kunze R., "Algebra Lineal"

[10] Kaufmann, J. " Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[11] Kolman, B. Álgebra lineal con Aplicaciones y Matlab, Prentice Hall 1999.

[12] Nakos, G. " Álgebra Lineal con Aplicaciones ", Brooks/Cole Publishing Company 1998

[13] Orellana A. "Apuntes de Algebra" Universidad de Santiago de Chile 1997

[14] Santander R., Un Segundo curso de Algebra Lineal

[15] Swokowski, E. " Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[16] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999